

確率表現関数の検定について

—Kolmogorov-Smirnov 検定を考え直す—

森 口 繁 一*

Testing Hypothesis on Probability Representing Function

—Kolmogorov-Smirnov Test Reconsidered—

Sigeiti Moriguti*

As a method of testing hypothesis on cumulative distribution function, textbooks present Kolmogorov-Smirnov one sample test. It draws a pair of curves on each side of, and parallel to, the null hypothesis curve, with constant distance (probability-wise), and if the empirical curve goes outside of these boundary curves then the null hypothesis is rejected. The (probability-wise) constant distance for any distribution is a characteristic of this test, and it is the reason why it is classified as a non-parametric test. But is it the only possibility, or is it the best? Starting with this question, this paper observes the behavior of Kolmogorov-Smirnov test, and proposes an alternative which we shall call "probability limit method". Comparing the testing power empirically for several typical examples, it is shown to be an improvement certainly. On a number of examples in Moriguti [6], 'probability limits' are drawn in, and it is observed that they show the form and order of magnitude of the empirical variation of the 'representing function', which is defined to be the inverse of the cumulative distribution function.

累積分布関数に関する仮説の検定として, 教科書にはもっぱら Kolmogorov-Smirnov 検定が登場する。それは「確率方向に」一定の幅をもたせ, 実験線がその幅の外へはみだしたときに有為な差があると判定するものである。この幅が分布の形に無関係に定められる点の一つの特色であり, これが「ノンパラメトリック検定」の仲間に入れられる所以でもある。しかし, それが唯一最良のものであろうか。本論文はこの疑問から発し, Kolmogorov-Smirnov 検定の特性を観察した結果, 一つの改良試案を提出するものである。いくつかの典型的な例について両者の検出力曲線を実験的に比較したところ, 確かに改良になっていることが確認された。森口[6]のいくつかの実測データについて, 理論線の両側に試案による限界線を引いた図を作ってみると, それらが実験変動による表現関数の変動の形と程度をよく代表していることがわかる。

1. 序 説

確率表現関数 (probability representing function) とは, 累積分布関数 $F(x)$ の逆関数である。すなわち

$$(1.1) \quad u = F(x)$$

論文受付: 1995年7月 改訂受付: 1995年9月 受理: 1995年9月

* 東京大学名誉教授 (Professor Emeritus, University of Tokyo)

〒167 杉並区松庵 2-16-12 (Syoan 2-16-12, Suginami-ku, Tokyo 167, Japan)

のとき、実質的に

$$(1.2) \quad x = \chi(u)$$

となる関数 $\chi(u)$ が確率表現関数である。これを単に「表現関数」と呼ぶこともある。

森口 [6] では、この概念を導入するとともに、その使い勝手を吟味した。その中に、実験データと理論線とを比較する図がいくつかあり、「かなりよく合っている」というような表現が書き添えてある。ここで読者は、なぜそこに適合度検定がしてないのかという疑問を抱くかもしれない。じつは著者もそのことを意識しており、Kolmogorov-Smirnov 検定の 5% 限界線ぐらゐは入れようかと考えたこともあったが、心の奥に何かひっかかるものを感じて、それをしないままにしておいた。

その後、この問題について考え、いくつかの模擬実験を試みた結果、一つの成案を得たので、ここに報告する次第である。

2. Kolmogorov-Smirnov 検定について

理論的な累積分布関数のグラフと、実測ないし実験の結果を表す「経験的累積分布関数」を表す階段グラフとを比較する問題について、多くの教科書に引用され、よく知られているものに、Kolmogorov-Smirnov の一標本検定がある。両側検定の場合、それは

$$(2.1) \quad d_n = \sup_x |F_0(x) - F_n(x)|$$

を基準とする。ここに $F_0(x)$ は「ゼロ仮説」に相当する与えられた分布関数で、連続分布ならば何でもよい。また $F_n(x)$ は母集団からの大きさ n の任意標本 x_1, x_2, \dots, x_n を昇順に並べ替えた値 $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ について、次のように定義した関数である：

$$(2.2) \quad F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)} \text{ のとき,} \\ i/n, & x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)} \text{ のとき,} \\ 1, & x_{(n)} \leq x \text{ のとき.} \end{cases}$$

この d_n の漸近的な分布について、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$(2.3) \quad \Pr\{d_n \leq yn^{-1/2}\} \rightarrow 1 - 2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \exp(-2r^2 y^2)$$

となることが知られており (Kolmogorov [4], Feller [3], Doob [2]), 有限の n については、近似的ながら Massey [5], Birnbaum [1] の作った表がある。それらによると、 $n=100$ の場合、両側 5% の危険率で検定するときの d_n の限界値は 0.136 ないし 0.134 となる。

表現関数の場合、「理論線」は (1.2) のグラフそのものであるが、実測線は、次の点を連ねた折れ線としよう：

$$(2.4) \quad (u_i, x_{(i)}), \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

ここに

$$(2.5) \quad u_i = (i-1/2)/n$$

である。そうすると、容易に検証できるように、(2.1) がある限界値 d_a を越えないということと、すべての i について

$$(2.6) \quad \chi(u_i - \bar{d}_a) \leq x_{(i)} \leq \chi(u_i + \bar{d}_a)$$

であることが同等である。ここに

$$(2.7) \quad \bar{d}_a = d_a - 1/(2n)$$

である。したがって、 $n=100$ に対して両側 5% の限界値 \bar{d}_a は大体 0.130 ということになる。

区間 $(0, 1)$ の上の一様分布の場合、 $0 < x < 1$ に対して $F(x) = x$ であり、したがって表現関数は $\chi(u) = u (0 < u < 1)$ である。この場合、限界線 $u \pm \bar{d}_a$ は理論線 $x = u$ を上または下に \bar{d}_a だけ平行移動した線になる(もちろん範囲外にはみ出た部分は消してしまう)。このような限界線を書き入れた図の上に、実験線を書き入れてみると、ある 20 回の試みの結果は図 1 のようになった。これらの実験線はほとんどすべて限界内にあり、中には限界すれすれのものもある。

ただ、少し気になるのは、限界に近い点が現れるのは主として中央部であって、両端に近いところは限界との間に白い隙間があいて見えることである。この点をもっと立ち入って観察するために、各試みについて

$$(2.8) \quad d_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_{(i)} - u_i|$$

の値を縦軸に、そしてその最大値を与える u_i を横軸にとって点を打ってみると、 $h=100$ 回の試みの結果は、たとえば図 2 のようになる。ここで (2.8) を与える i について、 $x_{(i)} > u_i$ の場合

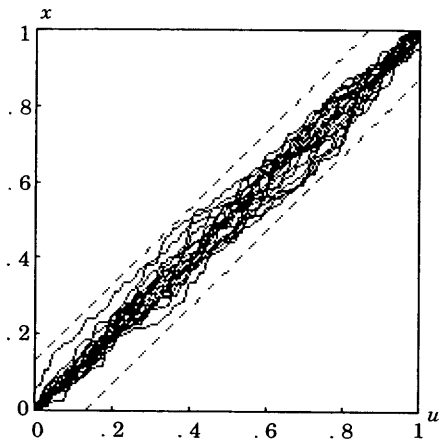


図1 Kolmogorov-Smirnov 限界線と 20 例の実験線

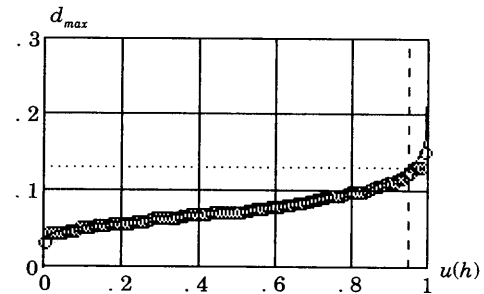


図3 d_{\max} の分布

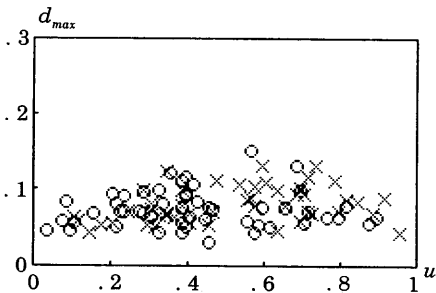


図2 d_{\max} とその位置

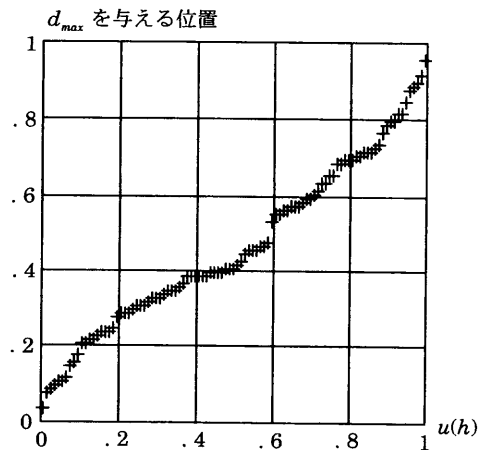


図4 d_{\max} の位置の分布

を○で、 $x_{(i)} < u_i$ の場合を×で表してある。これでも、 d_{\max} の大きい値は主として中央部で実現し、両端に近いところでは、たとえ実現したとしても値が小さいことが見てとれる。

この結果について、 d_{\max} の分布を「実験的表現関数」の図にしてみると、図3が得られる（累積分布関数の図とは縦軸と横軸の役割が入替わっていることに注意されたい）。図中の曲線は(2.3)に相当する漸近近似であるが、これと実験結果とはよく合っている。一方、 d_{\max} を与える u_i の分布を同様に図示すると図4のようなになる。この図にも、 d_{\max} を与える点が中央部に多く、両端部に少ないことが表れている。

こうしてみると、Kolmogorov-Smirnov 検定は、中央部のずれに対しては比較的敏感であるが、両端に近い部分でのずれに対しては鈍感であることが想像される。一般に中央部では、移動定数や尺度因子を適当に選んで調整することが多いので、分布型のずれは中央部よりはむしろ両端部に多く現れるであろうことを考えると、Kolmogorov-Smirnov 検定に見られる上記の性質はその弱点と見てよいのではあるまいか。この検定を見直してみようというねらいはこの点にある。

3. 確率限界法検定

Kolmogorov-Smirnov 検定法への対案としては、管理図法でおなじみの「3シグマ法」も考えられるが、これは肝腎の両端部で不具合が生じ易いおそれがあるので、ここではより安全な「確率限界法」を提案することとする。

区間(0, 1)の上の一様分布の場合、第 i 順序統計量 $x_{(i)}$ の分布は、母数 $i, n-i+1$ のベータ分布に従うことがよく知られている。すなわち

$$(3.1) \quad \Pr\{x_{(i)} \leq x\} = I_x(i, n-i+1)$$

である。この確率の値が α となる点を $z_L(i)$ 、 $1-\alpha$ となる点を $z_U(i)$ とし、 $i=1, 2, \dots, n$ について $(u_i, z_L(i))$ を連ねた線を下方限界線、 $(u_i, z_U(i))$ を連ねた線を上方限界線とする。そして、実験点がこの限界の外に出れば有意な差があると見ようというのが、ここで提案しようとする「確率限界法」である。ただし、この α は、限界を算出するために定める仮の確率であって、これと検定の危険率——第1種の過誤の確率——とは、互に増加関数の関係にあることは確かであるが、その関係を確立することは容易でないと思われる。

そこで、図2に対応して図5を作ってみる。こんどは各試みについて

$$(3.2) \quad \alpha_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} \{ \text{Min}[I_x(i, n-i+1), I_{1-x}(n-i+1, i)] | x = x_{(i)} \}$$

を求め、 $-\log_{10}(2\alpha_{\min})$ を縦軸にとり、それを与える i を u_i の形で横軸にとる。そして α_{\min} を与えるものが $I_x(i, n-i+1)$ である場合を×で、そうでない場合を○で表す。図2の場合とは逆に、図5ではどちらかという両端に近いところで α_{\min} が与えられることが多いが、中央部との違いはわずかで、ほぼ一様と見てよさそうである。(かりに両端部で多いとしても、それは弱点ではなくて長所だという考えもありうる。)

図3, 図4に対応する図はそれぞれ図6, 図7のようなになる。図7には、 α_{\min} を与える i の分布についての上記の傾向が、さらにはっきりと現れている。図6では、両側確率5%の危険率で限界線を決めるためには、 $-\log_{10}(2\alpha) = 2.5$ すなわち $2\alpha = 0.003$ ぐらいにとればよいことを示唆している。これはたまたま、いわゆる「3シグマ法」とよく符合する値でもある。

念のために付言すると、(3.1)は、確率 x の事象 $\{x \leq x\}$ を独立に n 回試行したとき、アタリ の数が i 個以上である確率と同じであり、したがって2項分布の部分和として、公式

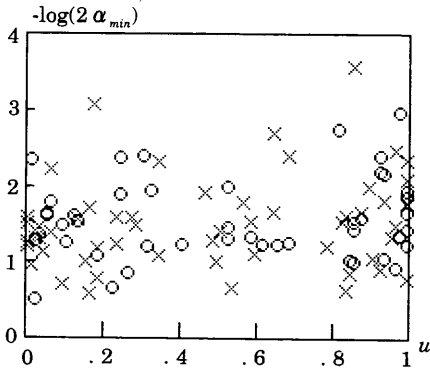


図5 α_{\min} とその位置

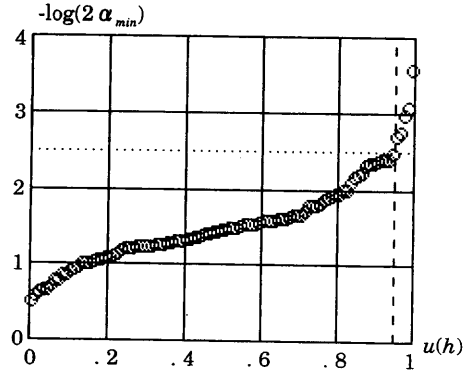


図6 α_{\min} の分布 (対数目盛り)

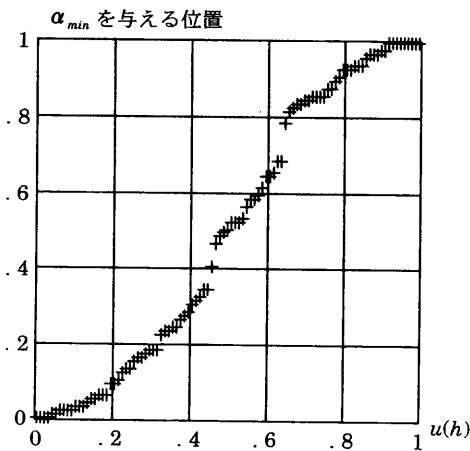


図7 α_{\min} の位置の分布

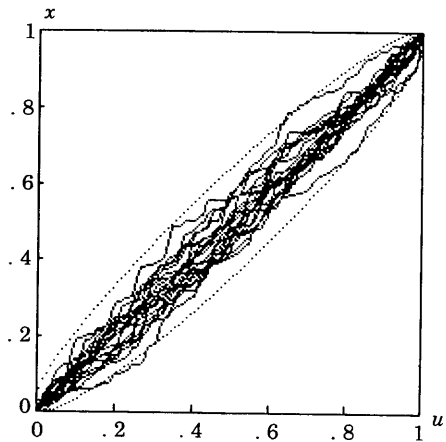


図8 確率限界線と20例の実験線

$$(3.3) \quad \Pr\{x_{(i)} \leq x\} = \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}$$

でも与えられる。このことは形式的に部分積分法によって確かめることもできるし、数値計算上も、この形を用いるのが便利である。

$n=100$ に対して、 $2a=0.003$ としたときの $z_L(i), z_U(i)$ を計算した結果を表1に示す。これを点線で示した図の上に、図1と同じ20回の試みの結果を重ねてみると、こんどは図8のように、曲線群と限界線とは、よくなじむようである。これで見ても、分布の変化に対して、同じ危険率のもとで、一般に検出力が改善されるであろうと期待することができよう。

4. いろいろな分布についての検出力

これまででは、もっぱら区間 $(0, 1)$ の上の一様分布について考察を進めてきたが、一般の連続分布については、実験点に対する限界線は、表1の $z_L(i), z_U(i)$ に表現関数 $\chi(u)$ を用いて、縦座標を $\chi(z_L(i)), \chi(z_U(i))$ に変えるだけでよい。(Kolmogorov-Smirnov 検定では、(2.6)による。)

例1. t 分布. 自由度 ν の t 分布は $\nu \rightarrow \infty$ の極限が標準正規分布 $N(0, 1)$ になる。いま「ゼロ仮説」を標準正規分布

表1 確率限界 (一様分布, $n=100, 2\alpha=.003$)

i	$z_L(i)$	$z_U(i)$	i	$z_L(i)$	$z_U(i)$	i	$z_L(i)$	$z_U(i)$	i	$z_L(i)$	$z_U(i)$
1	.00002	.06295	26	.14298	.39645	51	.35988	.64952	76	.61458	.86480
2	.00056	.08449	27	.15084	.40739	52	.36933	.65886	77	.62570	.87249
3	.00222	.10285	28	.15878	.41825	53	.37884	.66815	78	.63690	.88009
4	.00485	.11962	29	.16680	.42903	54	.38841	.67738	79	.64821	.88759
5	.00825	.13538	30	.17490	.43974	55	.39804	.68655	80	.65961	.89499
6	.01223	.15042	31	.18307	.45037	56	.40772	.69566	81	.67112	.90229
7	.01670	.16492	32	.19131	.46092	57	.41746	.70472	82	.68274	.90948
8	.02157	.17898	33	.19962	.47141	58	.42726	.71372	83	.69448	.91655
9	.02677	.19267	34	.20800	.48183	59	.43712	.72266	84	.70635	.92350
10	.03226	.20605	35	.21644	.49219	60	.44703	.73154	85	.71835	.93032
11	.03800	.21916	36	.22496	.50247	61	.45701	.74037	86	.73050	.93699
12	.04397	.23204	37	.23353	.51270	62	.46705	.74913	87	.74281	.94351
13	.05014	.24471	38	.24217	.52286	63	.47714	.75783	88	.75529	.94986
14	.05649	.25719	39	.25087	.53295	64	.48730	.76647	89	.76796	.95603
15	.06301	.26950	40	.25963	.54299	65	.49753	.77504	90	.78084	.96200
16	.06968	.28165	41	.26846	.55297	66	.50781	.78356	91	.79395	.96774
17	.07650	.29365	42	.27734	.56288	67	.51817	.79200	92	.80733	.97323
18	.08345	.30552	43	.28628	.57274	68	.52859	.80038	93	.82102	.97843
19	.09052	.31726	44	.29528	.58254	69	.53908	.80869	94	.83508	.98330
20	.09771	.32888	45	.30434	.59228	70	.54963	.81693	95	.84958	.98777
21	.10501	.34039	46	.31345	.60196	71	.56026	.82510	96	.86462	.99175
22	.11241	.35179	47	.32262	.61159	72	.57097	.83320	97	.88038	.99515
23	.11991	.36310	48	.33185	.62116	73	.58175	.84122	98	.89715	.99778
24	.12751	.37430	49	.34114	.63067	74	.59261	.84916	99	.91551	.99944
25	.13520	.38542	50	.35048	.64012	75	.60355	.85702	100	.93705	.99998

$$(4.1) \quad \chi_0(u) = \Phi^{-1}(u) \quad (0 < u < 1)$$

とし、対立仮説として「自由度 ν の t 分布」をとって、検出力を調べてみよう。すべて $h=100$ 回の試みで実験的に調べることにし、判定が「有意」と出た相対度数 $P(\nu)$ を、自由度の逆数に対して打点してみると、図9が得られる。

*印で示される Kolmogorov-Smirnov 検定の検出力に比べて、○印で示される「確率限界法」の検出力がすぐれていることについては、ほとんど疑う余地があるまい。

例2. 対称ベータ分布. ベータ分布の母数 a, b を等しくとったものは、左右対称な分布になる。ゼロ仮説を $a=b=1/2$ とすると、それは「逆正弦法則」となり、累積分布関数は

$$(4.2) \quad F_0(x) = (2/\pi) \text{Arcsin}(\sqrt{x}), \quad (0 < x < 1),$$

したがって、確率表現関数

$$(4.3) \quad \chi_0(u) = \sin^2(u\pi/2)$$

をもつ。

対立仮説を $a=b \neq 1/2$ として検出力を実験的に調べてみると、図10のようになり、*印で示される Kolmogorov-Smirnov 検定の検出力に比べて、○印で示される「確率限界法」の検出力がすぐれていることが、ここにも見られる。

例3. 極限極値分布. 最大値と最小値を総称して「極値」という。その極値の分布の極限が

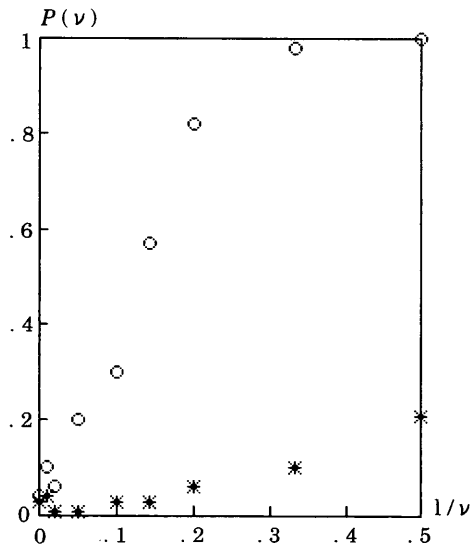


図9 t 分布についての検出力

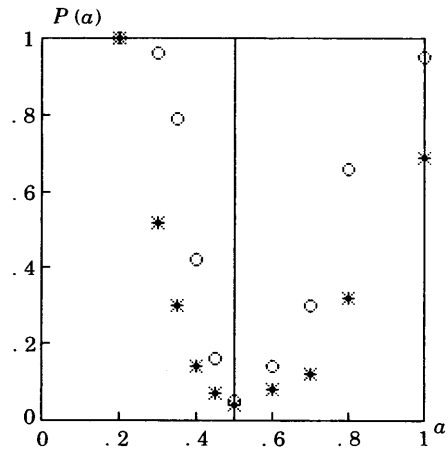


図10 対称ベータ分布についての検出力

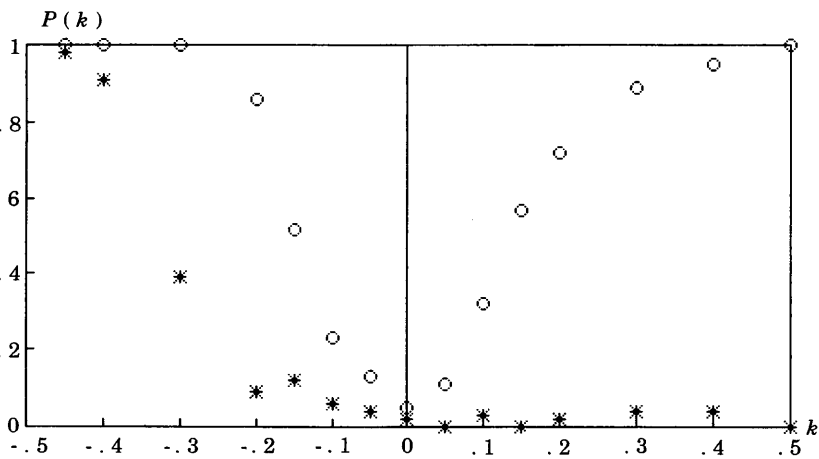


図11 極限極値分布についての検出力

ある分布になるとき、それを極限極値分布という。それに三つの型があることが知られている。これを表現関数で表し、平均と標準偏差によって標準化して比べてみると、その三つの型が連続した一族をなすことがよくわかる(森口 [6], § 45)。

いま、ゼロ仮説を「指数型」とし、対立仮説をその両側に続く「有限型」と「コーシー型」にとって、検出力を調べてみる。図 11 はその結果である。 k は正のとき有限型、負のときコーシー型に対応し、 $k=0$ は指数型に対応する。

ここにもいままでと同様の傾向が見られるが、とくに Kolmogorov-Smirnov 検定が、有限型の方への変化に鈍感なことは驚くばかりである。

5. 確率限界線の例

森口 [6] の中には、実測値と理論線とを比較する例がいろいろある。それらのうちのいくつ

かについて、ここに提案する「確率限界法」による判定限界線を書き入れたものを見てみよう。

例1. 車の番号(森口[6], 図12.5). 図12の○は、ある日ある交差点で実際に観測した $n=100$ 台の車の番号を、昇順に整列して打点した実測点である。理論線は大体原点を通る対角線と見てよい。その上下に引いた点線は、確率限界を示すものであり、表1にある数値 $z_L(i), z_U(i)$ の10000倍を縦軸にとって打点したものである。実測点はすべてこの限界内におさまっており、理論線からの離れ方も、図1の中の本と見ておかしくない形をしている。

例2. 物理定数の仮数の分布(森口[6], 図31.1). 図13の○は、手近にあった「理科年表」の中の基礎物理定数36個の仮数部(SI単位で表したときの数値の部分)を、10の整数乗で調節して、1以上10未満の数に直したものを昇順に並べて打点したものである。

理論線は $\chi(u)=10^u (0 < u < 1)$ である。点は下半分は大體理論線に沿っているが、上半分は、ちょっと気になるほど離れた部分もある。

点線は、ここでも確率限界線を表している。それは $n=36$ に対して、表1と同様に計算して求めた $z_L(u), z_U(u)$ を、上の表現関数 $\chi(u)$ を用いて変換したものである。

こうしてみると、点はすべて限界内にあり、さきほど気になるといった部分も、やはりそう

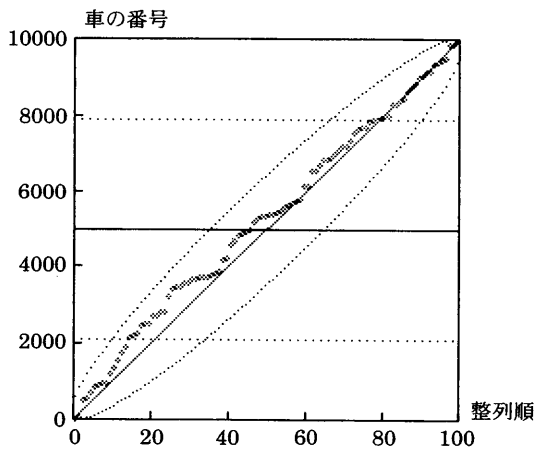


図12 車の番号 ($n=100$)

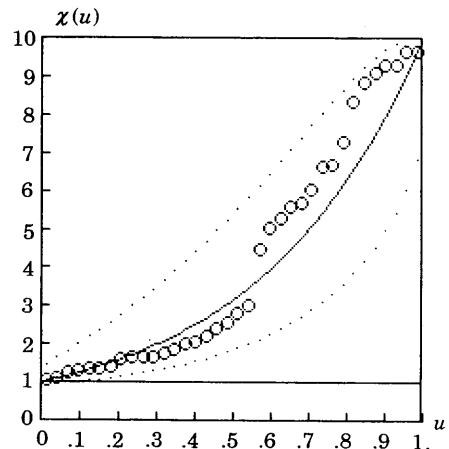


図13 仮数の分布 ($n=36$)

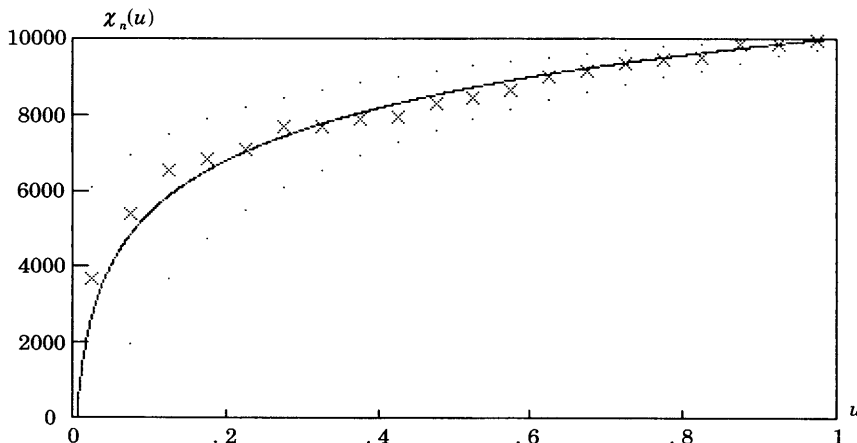


図14 車の番号の最大値の分布 ($n=20$)

かと納得がゆく程度であることがわかる。この場合、理論線を左または右に平行移動させるだけのKolmogorov-Smirnov 限界線よりも、われわれの限界線のほうが、より自然だと感じられる。

例 3. 車の番号の最大値の分布(森口 [6], 図 42.1)。図 14 は、図 12 で用いた 100 個のデータを、観測順に 5 個ずつ 20 組に分け、それぞれの組の中の最大値を、昇順に並べ変えて○で表示したものである。理論線としては、漸近近似の式を用い、限界を表す点も、 $n=20$ について表 1 と同様に計算した限界値を、理論線と同じ関数で変換して打ったものである。

この場合も、実測点は理論線とよく合っており、ずれかたもごく自然と納得できる。

例 4. 加硫天然ゴムの引張り強さ(森口 [6], 図 52.1)。加瀬は加硫天然ゴムの引張り試験で得られた $n=200$ 個のデータに、指数型の極限極値分布を当てはめている。図 15 はこれを表現関数の形にして示したものである。

平均と標準偏差が一致するように移動定数と尺度因子が定めてあるので、中央部で実験点と理論線がよく合うのは当然であるとしても、両端部でも点はほとんど理論線の上ののっていると見てよいほどである。

この場合も、限界線は、 $n=200$ についての表 1 と同様の数値の列を、理論線と同じ関数で変換した点の列として示しているが、これに照らしても、理論と実験とは申し分なくよく合っていると見てよい。

例 5. ワイブル確率紙の上の限界線(森口 [6], 図 53.1)。図 16 は、加瀬から提供を受けた加硫天然ゴムに関する 200 個の原データを、ワイブル確率紙の上に打点したものである。ワイブル確率紙は、この上で実験点に直線を当てはめるためのものであり、この場合、傾斜 $k=0.07$ ぐらいの直線がよく当てはまりそうである。

一方、 $n=200$ の場合の限界線を、 $k=0.07$ の理論関数を用いて変換したものを折れ線で示してある。この場合、実験点は左の方では上方限界に近く、右の方では下方限界に近いので、あるいはもっと小さい k を用いた方が、もっとよく適合するのかもしれない。もっとも、縦軸に対数目盛りを用いたときは、一般に上方へのずれに比べて下方へのずれを誇張して示す傾向があるので、この種の図を見るときは、その点に留意する必要がある。

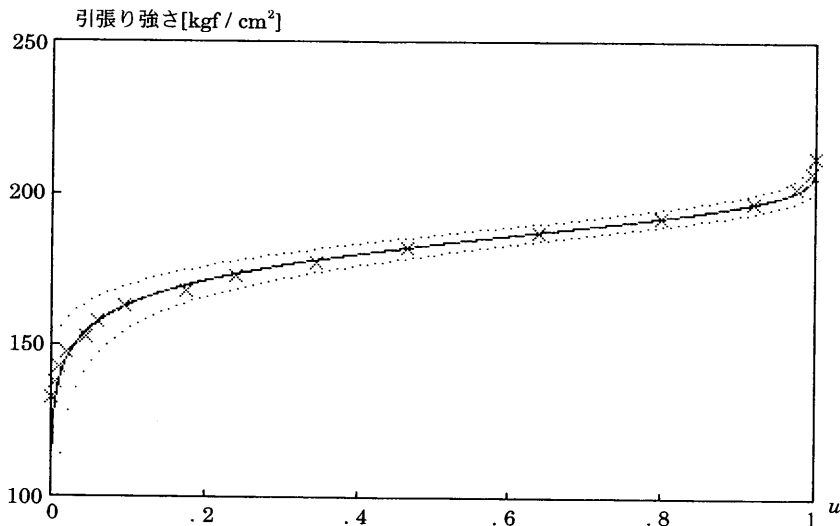


図 15 加硫天然ゴムの引張り強さ ($n=200$)

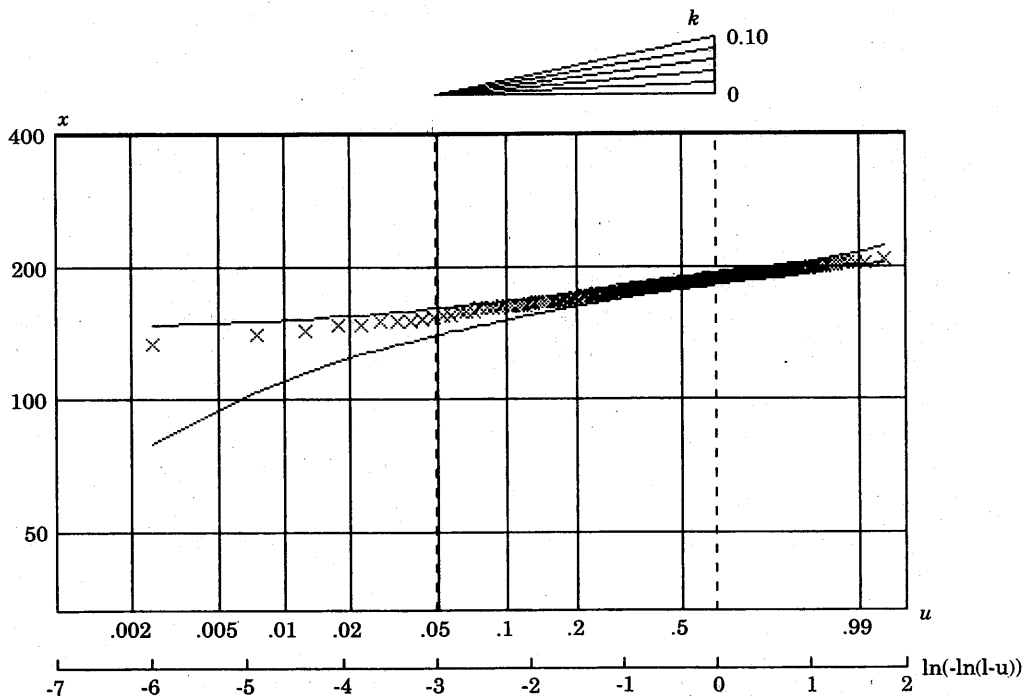


図16 ワイブル確率紙の上の加硫天然ゴムの引張り強さ ($n=200$)

6. 離散分布の場合その他

前節で見たのはすべておとなしい連続分布の場合であった。Kolmogorov-Smirnov 検定は一般に連続分布に適用するものとされている。離散分布について、われわれの確率限界法を適用するとどんなことになるかを、いくつかの例について見てみよう。

一般に確率変数のとりうる値 x が自然数に限られている場合、個々の x の現れる確率を p_x 、その累積値を

$$(6.1) \quad P_x = p_1 + p_2 + \cdots + p_x \quad (x=1, 2, \dots)$$

としたとき、各 x に対して、 $n=100$ ならば表1の $z_L(i)$, $z_U(i)$ を用いて、

$$(6.2) \quad \begin{aligned} i_L(x) &= \max\{i | z_U(i) < P_{x-1}\} & (x > 1), \\ &= 0 & (x = 1), \end{aligned}$$

$$(6.3) \quad i_R(x) = \min\{i | z_L(i) > P_x\} \quad (x \geq 1)$$

を定め、 $(i_L(x), x)$ を連ねた線を左方限界線 (left limit), $(i_R(x), x)$ を連ねた線を右方限界線 (right limit) とし、実測点がこの限界線を越えたら有意な差があると判定する。

例1. 幾何分布 アタリの確率 p の事象について、それが起こるまでの独立試行の回数を x とすると、それは「幾何分布」に従う。 $p=1/3$ のときの理論的な表現関数の階段線と、 $n=100$ 回の試みでの実測点のグラフ (森口 [6], 図 83.1) に、上述の限界線を書き込むと、図 17 のようになる。

実測点はすべて限界内におさまっているが、限界線に近い点もあることはある。

例 2. 負の二項分布 アタリの確率 p の事象について、2度目のアタリが出るまでの独立試行の回数を x とすると、それは指数 -2 の「負の二項分布」に従う。 $p=1/3$ の場合の理論線と実測点の図 (森口 [6], 図 83.3) に、上述の限界線を書き込むと、図 18 のようになる。

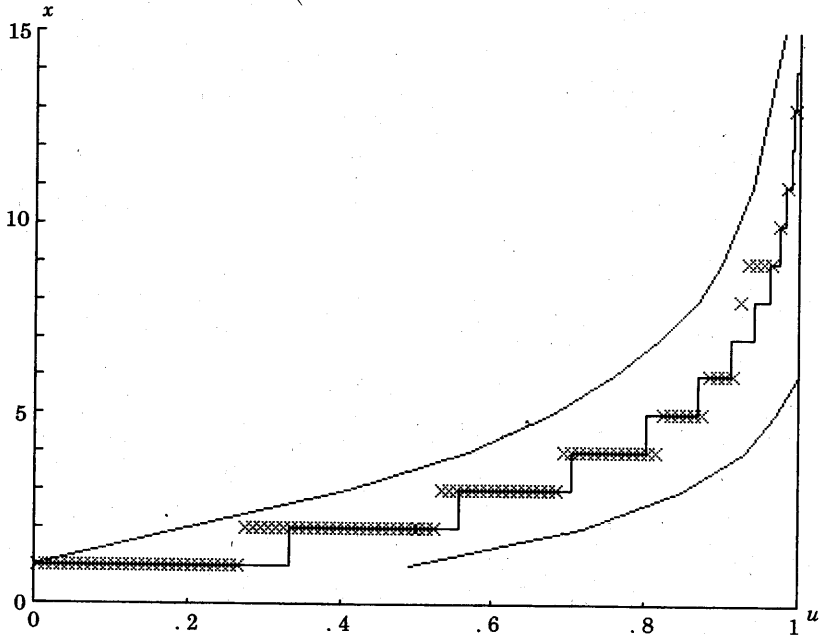


図 17 幾何分布 ($p=1/3$)

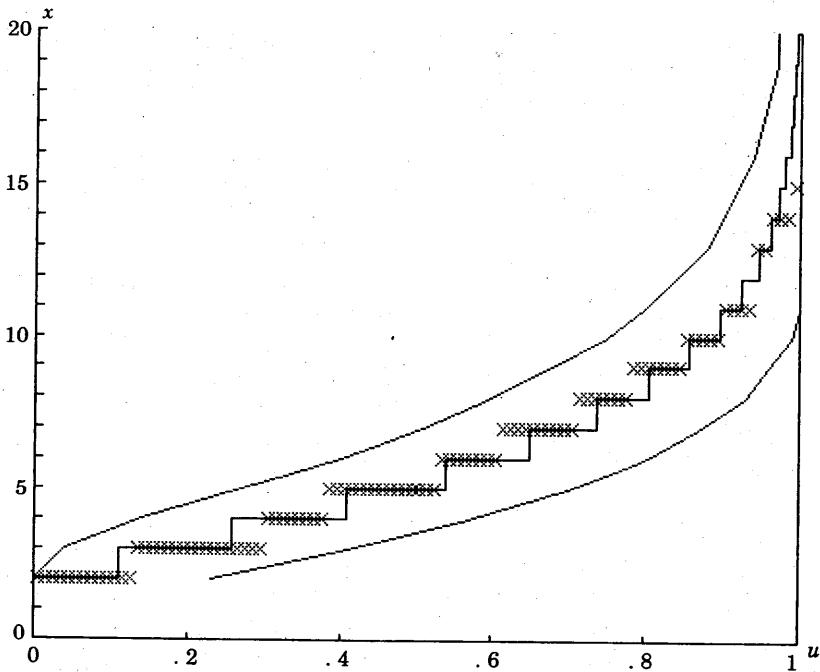
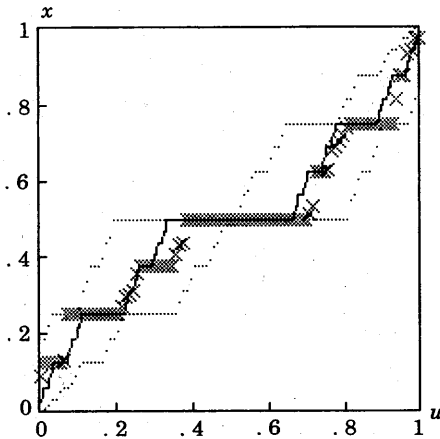


図 18 負の二項分布 ($n=100$)

図19 カントール分布 ($n=100$)

こんども、実測点は左右の限界線の間にはほどよくおさまっている。

例3. カントール分布 (森口 [6], §84) の表現関数は、無限個の水平な線分から成るけれども、数学的には連続関数である。 $n=100$ に対してわれわれの提案する限界を記入すると、図19の点群が得られる。理論線が水平な線分になるころでは、限界点も同じ高さの点列になるが、この場合の見方は、離散分布の場合と同様に、水平な点列の左端同士、また右端同士を比較すべきである。そうすると、このような奇妙な分布についても、われわれの判定基準は、かなりよく働くものであることがわかる。

7. むすび

ここに提案する「確率限界法」は、従来の Kolmogorov-Smirnov 検定に比べて、より自然であり、実用上もすぐれていることが明らかとなったと思う。これがあらゆる対立仮説に対して最上であると主張しているわけではないが、「ノンパラメトリックな検定」と総称される検定の中にもいろいろあって、ある種の対立仮説群に対する検出力の点で、その優劣を吟味することは問題にしてよいと思う。本論文はそういう試みの一つと見ることができよう。

「適合度検定」の名でよく知られているものに、Karl Pearson に始まる「カイ2乗検定」がある。これは度数表の形にしたデータについて用いるものであるが、この文脈に合わせるとすれば、区間の幅の取り方その他についてのある種の標準化が必要である。そのことを含めて、検出力を調べてみることは興味ある題目ではあるが、それは将来の課題に残しておこう。

なお、「確率限界法」自身についても、漸近理論の確立、もっと強力な計算能力を駆使しての精度の向上など、残された課題が多い。本論文がきっかけになって、そういう方向への発展がなされることを心から期待したい。

参考文献

- [1] Birnbaum, Z. W. (1952). Numerical tabulation of the distribution of Kolmogorov's statistic for finite sample size. *J. Amer. Statist. Assoc.* 47, 425-441.
- [2] Doob, J. L. (1949). Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems. *Annals of Math. Stat.* 20, 393-403.
- [3] Feller, W. (1948). On the Kolmogorov-Smirnov limit theorems for empirical distributions. *Annals of Math. Stat.* 19, 177-189. [Errata, 301-302.]
- [4] Kolmogorov, A. (1933). Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Inst. Ital. Attuari, Giorn.* 4, 83-91.
- [5] Massey, F. J., Jr. (1950). A note on the estimation of a distribution function by confidence limits. *Annals of Math. Stat.* 21, 116-119.
- [6] 森口繁一 (1995). 確率表現関数, 東京大学出版会.
- [7] Smirnov, N. (1939). Ob uklonenijah empiričeskoj krivoj raspredelenija. *Recueil Mathématique (Matematičeskii Sbornik)*, N. S. 6 (48), 3-26.