日本統計学会誌
第22巻，第3号（増刊号），1993年
375頁～411頁

統計的時系列分析の現状と展望

藤井光昭*，渡辺則生**，田中勝人***
酒井英昭****，川島利兵衛*****

Recent Developments and Perspectives of Statistical Time Series Analysis

Mituaki Huzii* Norio Watanabe** Katsuto Tanaka***
Hideaki Sakai**** and Rihei Kawashima*****

Recent developments and perspectives of statistical time series analysis are shown by taking the focus on some topics. The paper is formed of two main parts. The first part is related to general theories of statistical time series analysis and the second one is related to specific topics in some special fields. In the first part, we discuss statistical inferences by parametric and non-parametric methods, prediction and so on. In the second part, we deal with specific topics in the fields of Economics, Engineering and Marine Technology.

時系列に関する統計的分析の研究の現状と展望について，いくつかの重要と考えられるテーマや分野に焦点を合せる形で論じた．内容は，一般的理論に関する部分といくつかの分野における特有の分析や応用に関する部分から構成されている．前者については，有限次元パラメータモデルに関する推測，ノンパラメトリックな推測，予測等であり，後者については，経済学分野，工学分野，海洋関係分野における時系列分析について論じた．

0. 要　約

時間の経過とともに不規則的に変動していく時系列に関する統計的分析の研究の現状はどのようなものであるか，また今後どのような問題を解決していかなければならないと考えるか等をまとめたものであるが，内容は以下のようである．

1. 統計的時系列分析に関する理論や手法の現状
2. 時系列分析の理論
   - 2.1 時系列の確率論的表現
   - 2.2 定常性を持つ時系列の分析のための有限次元パラメータモデルと推測
   - 2.3 非定常性を持つ時系列の分析のための有限次元パラメータモデルと推測
   - 2.4 ノンパラメトリックな分析
     - 2.4.1 定常過程の場合
     - 2.4.2 非定常過程の場合

論文受付：1993年1月　改訂受付：1993年3月　受理：1993年3月
* 東京工業大学理学部，〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1
** 中央大学理工学部，〒112 東京都文京区春日 1-13-27
*** 一橋大学経済学部，〒186 東京都国立市中 2-1
**** 京都大学工学部，〒606 京都市左京区吉田本町
***** 北海道大学名誉教授，〒970 福島県いわき市石森 2-12-6

全体的に詳細に論じることはむずかしいので，いくつかの観点で，いくつかの重要と考えられるテーマに焦点を合わせる形で論じた．特に3では，他にも多くの分野で関連した分析が行われているが，ここでは異なった3つの分野におけるいくつかのテーマをとりあげた．

1.　統計的時系列分析に関する理論や手法の現状

ある世帯の1ケ月の消費支出額が月がかわると変動していくように，時の経過とともにある事柄の測定値が変動していくとき，その測定値を時間の順序で並べた系列を時系列（time series）と呼んでいる．

このような時系列の統計的分析は古くからさまざまな形で行われてきている．得られたデータに即してその時系列の特徴をとらえるためにいくつかの量（たとえば移動平均など）を求めたり図に表現したりするための多くの手法が提案され，実際に用いられてきている．又一方では，時系列の変動を近年発展している確率論（特に確率過程論）の概念を用いて数学的に表現し，統計的分析を推測統計の理論の線にそって理論的に展開することも行われ，近年非常に発展している．ここではまず2において，近年発展している時系列の分析理論の現状と展望を，3においてはいくつかの分野でのその分野特有な統計的時系列分析の現状と展望を述べることにする．分野としてはここでは経済学，工学，海洋学の3つに限定し，しかも各分野のいくつかのテーマにしぼった形で述べるが，現在時系列分析は他の多くのテーマのなかでも行われ，又医学，生物学，地球科学等多くの分野で関連した分析が行われている．

2.　時系列分析の理論

藤井光昭　渡辺則生

2.1　時系列の確率論的表現

時系列の分析法の理論等を展開しようとするとき，時系列を数学的に厳密に表現しておく必要があり，それには1930年頃から確率論で盛に論じられるようになった確率過程（stochastic process)の概念を用いている．即ち，各時点 t での測定値には偶然性によるものが含まれていると考え，時点 t での値は確率変数 X_t と考え，t を動かして得られる確率変数の系列 $\{X_t\}$ を確率過程と呼んでいる（Doob [38]，伊藤 [64] 等）．確率過程は非常に広い範囲の測定値の系列を対象にしているが，通常時系列分析として対象にしているものは，定常性をもつ確率過程（弱定常過程）又は定常性は持たないが何らかの形で弱定常過程と関係している確率過程（多くの場合これを非定常過程と呼んでいる）がほとんどである．ここで弱定常過程(weakly stationary process) 又は広義定常過程とは，X_t が実数値をとるとき $EX_t^2<\infty$ で $EX_t=m$（平均値が t に無関係に一定），$E(X_t-m)(X_{t+h}-m)=R_h$(X_t と X_{t+h} の自己共分散が h のみにより定まり，t に無関係）となるものであり，$\rho_h=R_h/R_0$ を時点差 h の自己相関係数 (autocorrelation) と呼んでいる(複素数値をとるときには $R_h=E(X_{t+h}-m)\overline{(X_t-m)}$ とする)．弱定常性は $\{X_t\}$ に対する線形的な演算を論じるときによく仮定される性質である．現在までのところ線形理論に関して多くの研究がなされ，多くの成果が得られてきている．現実の問題においては非線形な問題も多く，最近ではこれらの統計的な解決のためのいくつかの成果も発表されいるが，これらの理論を展開するためには弱定常性では不十分で，有限個の時点の値の同時確率分布が時点の平行移動について不変であるという強定常性を持つ強定常過程 (strongly stationary process) を対象に議論を展開する必要性が生じてくる．定常性を持つ確率過程については，Doob [38], Grenander-Rosenblatt [50], Fuller [42], Brockwell-Davis [30]，藤井 [61]，ハーベイ（国友一山本 訳 [54]）等多くの文献がある．

1つの世帯の1ケ月の収入額と消費支出額の変動の関係をとらえたいという場合のように，一般に K 個の時系列 $\{X_t^{(1)}\}$, $\{X_t^{(2)}\}$, ……, $\{X_t^{(K)}\}$ の互の関係(単に同じ時点 t での値の関係だけではなく，$X_t^{(1)}$ と $X_s^{(2)}$ の関係等も）をとらえたい場合には，これを $X_t=(X_t^{(1)}, X_t^{(2)},\cdots\cdots, X_t^{(K)})'$ のようにして多変量時系列として扱い，多変量解析のように種々の理論が展開されている（Hannan [52], Brillinger [28] 等)．多変量解析の場合と異なるのは，$X_t^{(i)}$ と $X_t^{(j)}$ の相関の他に $X_t^{(i)}$ と $X_s^{(j)}$ の相関等も考慮に入れなければならない点である．$\{X_t\}$ が実数値をとる場合に弱定常過程であるとは，任意な $k(1\leqq k\leqq K)$ について $E(X_t^{(k)})^2<\infty$ であり，$EX_t=(EX_t^{(1)}, EX_t^{(2)},\cdots\cdots, EX_t^{(K)})'=(m^{(1)}, m^{(2)},\cdots\cdots, m^{(K)})=m$($t$ に無関係で一定値)，$E(X_{t+h}-m)\times(X_t-m)'=R_h$($t$ に無関係で h のみで定まる．R_h は $K\times K$ の行列で，(k, l) 要素は $E(X_{t+h}^{(k)}-m^{(k)})(X_t^{(l)}-m^{(l)})$ となる場合である．強定常過程も1変量の場合を拡張した形で定義される．

時系列に関する理論的な議論をするとき，時点をあらわすパラメータ t としては，整数値と実数値 $(-\infty<t<\infty)$ がよく用いられる．整数値は一定時間間隔ごとに測定を行う場合の表現に用い，時間間隔を簡単のため1とするのもである（時間間隔を△としても以下と同様の理論が展開できるが表現が複雑になるので，ここでは簡単に1とする)．t を実数値としてとる場合は測定値が連続的に得られる場合に対応する．気温の刻々の変化のようにもとの現象自体は時間に関し連続的に変動しているが，測定は有限個の時点（1時間ごと，等）でしか出来ない場合は統計的な理論は時間パラメータを離散として表現する必要があり，もとの現象の連続時間特有の量（例えば時点 t での微分係数の値）の推測には，測定する有限個の時点のとり方（即ち，時点の抽出法）に工夫（たとえば測定時間間隔を短くして極限の理論を行うとか，時点をランダムにとるとか (Grenander-Rosenblatt [50])）が必要で，時点の抽出法の議論がないと統計的な意味では十分と云えないであろう．以下においては，特に断らない限り，t は整数値をとるものとする．

時間パラメータを多次元にした確率場 (random field) の概念も応用上は重要なものである (Rosenblatt [85], Yaglom [110])．これは $t=(t_1, t_2,\cdots, t_J)'$($J$ は正整数）とおき，t での測定値をあらわす確率変数を X_t とし $\{X_t\}$ を分析するものである．たとえば，$J=4$ とし，t_1 は通常

の時間パラメータ t_2, t_3, t_4 はそれぞれ3次元空間上の点 P の x 座標，y 座標，z 座標とし，X_t で点 P における時点 t_1 での風力の値を示すようなものである．定常性に対応する概念は簡単でない．通常の時系列解析で論じられている概念や統計量などは，形式的には，確率場に拡張可能であるが，意味がかなりかわってくる．たとえば予測について論じる時でも，“過去”をどう定義するか等簡単ではなく，定義のしかたにより理論等の展開のしかたも異なってくる．確率場に関する統計理論はまだそれほど多くは発表されていない．

定常性を持つ確率過程だけではなく，更に広く拡散過程などを含めた統計理論についても研究が行われているが（Basawa-Prakasa Rao [20], Liptser-Shiryaev [71], [72] 等），現在のところ文献はあまり多くない．

定常性を持つ確率過程に関連させての非定常過程の統計理論については2.3で述べる．

2.2　定常性を持つ時系列の分析のための有限次元パラメータモデルと推測

通常時系列と呼ばれているもののなかで，比較的長期にわたり研究が深められ多くの成果が発表されてきている定常性（線形的扱いが中心のため，主として弱定常性）を持つものについてまず考えてみることにする．

弱定常過程の場合，統計的分析のためにはその平均値 m，自己共分散 $R_h(h\geqq 1)$ 又は自己相関係数 $\rho_h(h\geqq 1)$ あるいはスペクトル密度関数

$$f(\lambda)=\sum_{h=-\infty}^{\infty} R_h \cos 2\pi h\lambda, \quad -1/2<\lambda\leqq 1/2$$

等に関する推測が必要になる．ところが R_h や ρ_h については $h\geqq 0$ なる h についてすべて論じる必要があり，無限個（無限次元）の量を知る必要がある．$f(\lambda)$ についても $(-1/2, 1/2]$ のすべての λ について論じる必要があり，やはり無限個のものである．ところが得られる標本の個数は有限であるから，基本的には全部を知ることは無理で，ここに推測のむずかしさが生じ，たとえば推定量を構成するための理論も簡単ではない．

定常性自体も1つのモデルであるが，自己相関係数やスペクトル密度関数等がある有限個（有限次元）のパラメータの値をきめればすべて定まってしまうようなモデルの場合には，これら有限次元のパラメータさえ推測すればよく，非常に安定した信頼性の高い結果が得られる．このようなことから，有限次元のパラメータによって定まるような時系列の構造を設定し，これを有限次元パラメータモデルと呼んでいる．時系列分析で，単にモデルと呼ぶときには，有限次元パラメータモデルをさすことが多い．

現在応用上も最もよく用いられ，また理論的研究の対象となっているモデルに自己回帰（autoregressive, AR と略）過程，移動平均（moving average, MA と略）過程，自己回帰移動平均（autoregressive moving average, ARMA と略）過程がある．$\{X_t\}$ を $EX_t=0$ である弱定常過程とし，スペクトル密度関数 $f(\lambda)$ を持ち，$f(\lambda)$ は

$$\int_0^{1/2}\log f(\lambda)d\lambda>-\infty$$（$\{X_t\}$ が純非決定的，即ち X_t が $\{X_s\,;\,s\leqq t-1\}$ の線形結合で完全に定まってしまわないこと等を意味する）

という条件を充たすものとする．このとき各 t について X_t から，$t-1$ 以前の値 $\{X_s\,;\,s\leqq t-1\}$ の線形結合（これを数学的には $\{X_s\,;\,s\leqq t-1\}$ から生成されるヒルベルト空間と表現し，ここでは $L^2(X\,;\,t-1)$ と表すことにする）で定まる部分を差し引いて（数学的には，$X_t-(X_t$ の $L^2(X\,;\,t-1)$ への射影$)$），それを分散が1であるように変換したものを ε_t とおく．$\{\varepsilon_t\}$ は互に無相関で，平均値0，分散1の確率変数の系列（ホワイトノイズという）となる．このとき上に述べたモデルは，t に無関係な定数 $\phi_0=1, \phi_1, \phi_2,\cdots, \phi_p, \theta_0, \theta_1,\cdots, \theta_q$ を用いて

$$\phi_0 X_t + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} = \theta_0 \varepsilon_t$$

(次数 p の AR 過程，AR(p) 過程と略)

$$X_t = \theta_0 \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

(次数 q の MA 過程，MA(q) 過程と略)

$$X_t + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} = \theta_0 \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

(次数 (p, q) の ARMA 過程，ARMA(p, q) 過程と略)

と表現される．上において，$\{X_s ; -\infty < s \leqq t\}$ が与えられたときに ε_t を $L^2(X ; t)$ の元として構成するという形で3つのモデルを定義したが，通常はこれらの点があいまいなまま定義されていることが多い．backward shift operator B を $BX_t = X_{t-1}$, $B^n X_t = B(B^{n-1} X_t)(n \geqq 2)$ のように定義するとき，AR(p) 過程は$(\sum_{k=0}^{p} \phi_k B^k) X_t = \theta_0 \varepsilon_t$ と表すことが出来る．Bを複素数 x でおきかえて，$\sum_{k=0}^{p} \phi_k x^k = 0$ という方程式(特性方程式)を考え，この方程式の解を $\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \cdots\cdots, \alpha_p^{-1}$ とする．このときすべての k について $|\alpha_k| < 1$ であれば $X_t = \phi_p^{-1}(B - \alpha_1^{-1})^{-1}(B - \alpha_2^{-1})^{-1} \times \cdots\cdots \times (B - \alpha_p^{-1})^{-1} \varepsilon_t$ と表現出来，X_t は $\{\varepsilon_s ; -\infty < s \leqq t\}$ で構成出来ることになる．同様に MA(q) 過程においてもまず明らかに X_t は $\{\varepsilon_s ; -\infty < s \leqq t\}$ で構成出来，$\sum_{j=0}^{q} \theta_j x^j = 0$ の解を $\beta_1^{-1}, \beta_2^{-1}, \cdots\cdots, \beta_q^{-1}$ とするとき，すべての j について $|\beta_j| < 1$ ならば ε_t は $\{X_s ; -\infty < s \leqq t\}$ で構成出来ることになる．ARMA (p, q) 過程についても同様である．

AR(p)過程の自己相関係数は $\sum_{k=0}^{p} \phi_k \rho_{n-k} = 0 (n \geqq 1)$ という定差方程式の解として定まり，$\{\phi_k ; 1 < k \leqq p\}$ の関数としてあらわされる．上で述べたような特性方程式の解の性質があれば $\lim_{h \to \infty} \rho_h = 0$ 等，合理的な性質を持つ ρ_h が求められる．MA(q) 過程の自己相関係数は，$R_h = \sum_{j=0}^{q-|h|} \theta_j \theta_{j+|h|} (0 \leqq |h| \leqq q)$, $R_h = 0 (|h| \geqq q+1)$, $\rho_h = R_h / R_0$ となり，やはり有限次元のパラメータ $\{\theta_j ; 0 \leqq j \leqq q\}$ により定まる．少し複雑になるが ARMA(p, q) 過程も同様である．ARMA(p, q) 過程のスペクトル密度関数は $f(\lambda) = |\sum_{j=0}^{q} \theta_j e^{-2\pi i j \lambda}|^2 / |\sum_{k=0}^{p} \phi_k e^{-2\pi i k \lambda}|^2$ となり，$\{\phi_k ; 0 \leqq k \leqq p\}$, $\{\theta_j ; 0 \leqq j \leqq q\}$ ですべて定まる．$q=0$ 又は $p=0$ とすれば，それぞれ AR(p) 過程，MA(q) 過程である．

前にも述べたように，AR(p) 過程，MA(q) 過程，ARMA(p, q) 過程のモデルは現在の時系列解析における有限次元パラメータモデルとして最もよく用いられ，その推測の理論や手法に関した著書や論文が多く発表されている (杉原 [94]，Tanaka [95]，川嶋一酒井 [67] 等)．

標本 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_T$ をもとに，その時系列は AR(p) 過程であるとか MA(q) 過程であるとかそのモデルの型を与えた上で，未知パラメータ $\{\phi_k ; 0 \leqq k \leqq p\}$ や $\{\theta_j ; 0 \leqq j \leqq q\}$ の推定に関する推測統計的な理論は1940年代くらいから，Mann-Wald [74], Whittle [106], Walker [103] 等によって示され，これらは現在に至っても基本となっている．これら有限次元パラメータの最尤推定量や最小2乗法による推定量については，標本が独立でないから通常標本が独立の場合に示されている推定論的性質や良さをそのまま適用することは出来ず，あらためて検討する必要がる．$\{X_t\}$ に正規性を仮定して最尤推定量の性質を論じたり (Whittle [106] 等)，最小2乗法による推定量の性質を論じたり (Walker [103] 等) している．例えば $\{X_t\}$ が $EX_t = 0$ の

正規 AR(p) 過程である場合に，$\{\phi_k, 0\leqq k\leqq p\}$ の条件つき擬似最尤推定量は，Tが大であるとき$Q=\sum_{t=p+1}^{T}(\sum_{k=0}^{p}\phi_k X_{t-k})^2/(T-p)$ を最小にする $\{\phi_k\}$ をもとめる（それを $\{\hat{\phi}_k\}$ とする）という最小2乗法による推定量と同一になる．$\sum_{h=0}^{\infty}|R_h|<\infty$ 等の条件（他については Anderson [11] 等参照）のもとで，$\{\hat{\phi}_k\}$ は $\{\phi_k\}$ の一致推定量であり，漸近的に正規分布に従い，漸近的有効推定量であることが示されている（Anderson [11]，藤井 [61] 等）．推定量の有効性を論じるとき，標本が独立とは限らず，この場合を含めて多次元パラメータの推定のときの不偏推定量の分散共分散行列の下限を論じた Cramér [36]の結果は重要である．時系列の有限次元パラメータの推定量に関しては，現在のところ正規性や $\{\varepsilon_t\}$ に独立性又はある種のマルチンゲール性などを仮定し，その上に $\{X_t\}$ のモデルを仮定し，それに更に条件を置いて論じるという形が行われている．一般的な形で有限次元パラメータで表現される線形過程を考え，有限次元パラメータの推定を論じたものに，Hosoya-Taniguchi [60], Hosoya [59], Taniguchi [98] 等がある．また他の有限次元パラメータモデルとしては，Bloomfield[25]によるスペクトル密度関数の指数型モデルがある．

時系列に AR(p), MA(q) 又は ARMA(p, q) 過程モデルをあてはめようとするとき，p や q が未知の場合に重要なのは p や q の定め方である．あてはめる p や q が真の値より小さいと，それから得られる推定量は偏ってしまうし，p や q が真の値より大きければ安心かと云うと大き過ぎる分だけ偶然誤差を持つ不安定な量が加わって変動のはげしい不安定な推定量を得ることになる（関連した議論は 2.4 でも述べる）．p や q をどのように定めるかについては，仮説検定の立場から Quenouille [84] などがあり，多重決定の立場から Anderson [10]（Anderson [11] にもあり）等がある．これらと異なった立場で Akaike [5]（赤池一中川 [9] にもあり）は AIC 法又は FPE 法を提案した．AR(p)過程の p の決定について述べれば，あらかじめ定めた p の上限 p_2，下限 p_1 の間ですべての p について

$$\mathrm{AIC}(p)=-2\log\,(\text{次数を}\ p\ \text{としたときの最大尤度})+2p$$

を求め，AIC(p) を最小にする p を推定量としようとするものである．この方法の統計的性質を論じたのが Shibata [87] にあり，その後，Schwarz [86] 等が別の方法を提案している．これらの別の面からの統計的性質は Pötscher [81] 等に示されている．これらの方法の性質の比較は Choi [35], Hannan-Deistler [53] 等で行われているが今後更に研究を積み重ねる必要があると思われる．

2.3　非定常性を持つ時系列の分析のための有限次元パラメータモデルと推測

非定常な時系列を分析するためのモデルも多く提案されている．非定常な時系列のモデルと云っても現在論じらているモデルのほとんどは，何らかの意味で定常過程と関係を持っている．古くから最もよく扱われてきた非定常時系列のモデルは，非定常時系列をあらわす確率過程を $\{Y_t\}$ とするとき，

$$Y_t=m_t+X_t$$

と表されるものである．ここで，$\{X_t\}$ は $EX_t^2<\infty$, $EX_t=0$ である確率過程で，多くの場合に弱定常性が仮定される．m_t は t の関数であり，$EY_t=m_t$ で平均値関数と呼ばれている．多くの解析では $m_t=C_0+C_1t+\cdots\cdots+C_Jt^J$（$J$ は整数で $J\geqq 0$）のような多項式を仮定したり，$\cos\lambda_1 t$, $\sin\lambda_2 t$ など既知の t の関数の1次結合を想定し，そこに含まれる未知の係数（上の例では C_0, $C_1,\cdots,C_J$）を推定する問題が論じられている．$\{X_t\}$ が t ごとに互に独立で，分散が一定値の場合

は最も簡単な場合であるが，弱定常性を持つ場合に標本数を大きくしたときの $\{C_j\}$ の単純最小2乗法による推定量の性質や有効性なども論じられてきている (Grenander-Rosenblatt [50], Toyooka [101]等). しかし $\{X_t\}$ が非定常性を持つ場合など更に一般的な場合の統計的性質や良い推定量を求める方法などは今後の研究を待つ必要がある. $\{X_t\}$ が互に独立で分散が t とともに変化する場合についてはGlejser [44], Goldfeld-Quandt [45] 等で扱われている. また $X_t=\sigma_t\xi_t$(ξ_t は弱定常過程で σ_t は t とともに変化する定数) の場合の推定法等についてはHarvey-Robinson [57], Huzii-Toyooka [63] 等で論じられている.

非定常な時系列を扱うために，近年よく用いられているモデルの1つに，Box-Jenkins [26] で系統的にその分析まで論じられているARIMA (autoregressive integrated moving average) モデルがある. これは時系列をあらわす確率過程を $\{Y_t\}$ とするとき，$\{Y_t\}$ は非定常であるが，現時点から次の時点への変化量あるいは更にその変化量，……，をつくると定常過程になり，ARMAモデルに従うと云うものである. Box-Jenkins [26] で用いられている記号を用いて数学的に表現すれば，$\nabla=1-B$ とおくとき $\nabla Y_t=(1-B)Y_t=Y_t-Y_{t-1}=X_t$ を構成すると $\{X_t\}$ が $EX_t=0$ の弱定常過程で

$$X_t+\phi_1X_{t-1}+\cdots\cdots+\phi_pX_{t-p}=\theta_0\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\cdots\cdots+\theta_q\varepsilon_{t-q}$$

というARMA(p, q) モデルをみたす場合がまず簡単な場合である. ∇Y_t に更に ∇ をほどこすことを $\nabla^2Y_t=\nabla(\nabla Y_t)=\nabla Y_t-\nabla Y_{t-1}$ のように書くとき，一般に d 回施した $\nabla^dY_t=X_t$ が $EX_t=0$ の弱定常過程でARMA(p, q) モデルに従うとき，$\{Y_t\}$ をARIMA(p, d, q) 過程という. $\{Y_t\}$ を数学的に厳密に定義しようとするときには，少し工夫が必要である. $\{X_t\,;-\infty<t<\infty\}$ の線形空間上に $\{Y_t\}$ を構成するためには，$V(Y_t)=\infty$ をさけるために t のある時点，たとえば時点 $t=0, -1, -2,\cdots\cdots, -(d-1)$ で初期値 $\{Y_j\,;-d+1\leqq j\leqq 0\}$ を与え，それから $Y_1, Y_2,\cdots\cdots$ を構成していくやり方をとる必要がある. $\{Y_t\}$ の方から $\{X_t\}$ を構成し $\{\varepsilon_t\}$ も構成するという立場をとると，適当な初期値 $\{Y_j\,;0\geqq j\geqq -d+1\}$ を用いて $\nabla^dY_t=X_t$ を $t\geqq 1$ について構成し，これから $\{\varepsilon_t\,;t\geqq 1\}$ を構成する形をとる. しかしこの場合，通常の弱定常過程における white noise $\{\varepsilon_t\}$ の構成と異なり工夫を要し，ARIMA過程の定義にも工夫を要する. そして未知パラメータの推定論についても，これらの定義を考慮する必要がある. ARIMA(p, d, q) 過程の場合，推定論上の新しい問題としては，d をいかに推定するかである.

応用との関係で関心が持たれるのは定常であるが非定常に近い時系列を表現するモデル，あるいは定常性と非定常性をあわせて持つようなモデルである. 前者のモデルとしては弱定常過程のARMA(p, q) モデルにおいて，自己回帰の部分に対応する特性方程式 $\sum_{k=0}^{p}\phi_kx^k=0$ の解の絶対値が1に近いものや(例えばChan-Wei [33])，自己相関 ρ_h の $|h|$ が大きいときの減衰がゆるやかでスペクトル密度の周波数0に対応する値が非常に大きくてlong-memoryモデルと呼ばれているもので，これらについて未知パラメータの推定等が論じられている (Yajima [111], [112]，岡本 [77]). Granger [47], Hosking [58] 等はスペクトル密度が

$$f(\lambda)=\frac{|\sum_{j=0}^{q}\theta_je^{-2\pi ij\lambda}|^2}{(|\sum_{k=0}^{p}\phi_ke^{-2\pi ik\lambda}|^2\times|(1-e^{-2\pi i\lambda})^d|^2)}$$

の形をしているFractional ARIMAモデルを提案している.

後者のモデルとしては，Granger-Andersen [48] で論じられているbilinear modelがある.

一般的な次数 (p, q, P, Q) の bilinear autoregressive moving average 過程とは

$$X_t=\sum_{j=1}^{p}a_jX_{t-j}+\sum_{i=0}^{q}b_i\varepsilon_{t-i}+\sum_{k=0}^{Q}\sum_{l=1}^{P}\beta_{kl}\varepsilon_{t-k}X_{t-l}$$

という形で表されている $\{X_t\}$ を云う．ここで $\{\varepsilon_t\}$ は $E\varepsilon_t=0$ で t ごとに独立で同一分布に従う確率変数列であり，$\{a_j\}, \{b_i\}, \{\beta_{kl}\}$ は定数である．$\{X_t\}$ が弱定常性を持つための $\{a_j\}, \{b_i\}, \{\beta_{kl}\}$ の条件等や $\{X_t\}$ の統計的性質や推定が Granger-Anderson [48], Subba Rao [91], Pham-Tran [79], Subba Rao-Gabr [93], Kim-Billard-Basawa [68] 等に示されている．どのような場合にこのモデルが有効かなど今後検討を要する問題点が多い．

非線形なモデルとして，$\{X_t\}$ の値のとり方によって異なった AR 過程に従うという Threshold Autoregressive モデルというものが提案されている (Tong-Lim [100])．これは簡単な場合について書けば，実数値全体を l 個の区間に分割し，その1つを R_j とするとき，$X_{t-d}\in R_j$, $1\leqq d\leqq p$, のとき

$$X_t=a_0^{(j)}+\sum_{i=1}^{p}a_i^{(j)}X_{t-i}+\varepsilon_t^{(j)}$$

とあらわされるものである．ここで $\{\varepsilon_t^{(j)}\}$ は $E\varepsilon_t^{(j)}=0$ の独立な確率変数列(ホワイトノイズ)で，$\{a_i^{(j)}\}$ は定数である．また Haggan-Ozaki [51] では exponential AR model，即ち

$$\begin{aligned}X_t=&\{\phi_1+\pi_1\exp(-\gamma X_{t-1}^2)\}X_{t-1}+\{\phi_2+\pi_2\exp(-\gamma X_{t-1}^2)\}X_{t-2}\\&+\cdots\cdots+\{\phi_p+\pi_p\exp(-\gamma X_{t-1}^2)\}X_{t-p}+\varepsilon_t\end{aligned}$$

の統計的性質や推定が論じられている．ここで $\{\phi_j\}, \{\pi_j\}, \gamma$ は定数で，$\{\varepsilon_t\}$ は $E\varepsilon_t=0$ の正規分布に従う互に独立な確率変数列である．

上に述べたモデルを含め，非定常あるいは非線形な時系列モデルとその推測理論は非常にむずかしい問題であるが，実用上は重要でもあり，今後研究を発展させていく必要があるであろう．

2.4　ノンパラメトリックな分析

2.4.1　定常過程の場合

$\{X_t\}$ を $EX_t=0$ である弱定常過程とするとき，2.2 で述べたような有限次元パラメータモデルを仮定しない形での自己相関係数 $\{\rho_h\}$ やスペクトル密度関数 $f(\lambda)$ の推定等についても古くから推定法等が提案され，現実の時系列の分析に用いられてきているが，これを現代の推定論の上に立って最良の方法を求めることはむずかしく，この問題を推定論的に論じること等は今後の研究を待つ部分が多い．$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_T$ を弱定常過程 $\{X_t\}$ からの標本とする．簡単のため $EX_t=0$ とする．

まず $\{\rho_h\}$ の推定から述べることにする．現在の $\{\rho_h\}$ の推定の議論は，ある推定量を求める統一方式 (たとえば最尤法など) によって求められる推定量についてその統計的性質を一般的に論じたり，最良の推定量について論じるというよりは，ある特別な推定量をとりあげてその統計的性質を論じるというのがほとんどである．それは，例えば $\{X_t\}$ に正規性を仮定して最尤推定量を求めようとしても，尤度を表現する際に $X_1, \cdots\cdots, X_T$ の自己相関 $\{\rho_h\,;1\leqq h\leqq T-1\}$ が入り，非常に複雑で数学的扱いがむずかしいこと，T を大きくしても ρ_{T-1} などについての情報は増えなくて推定量としてよくないことが予想されること，$\{\rho_h\,;|h|\geqq T+1\}$ の推定量は構成出来ないこと等によるものと考えられる．また，推定すべき未知パラメータの数 (次元) が無限であり，通常の推定理論の枠を越えていることも挙げられる．従って推定量の良さを論じるに

は，あらためて良さの基準をつくって論じる必要がある．このようなことからある特別な推定量の統計的性質を論じるときも，ある有限個の h に対する ρ_h の推定という形で論じられている．$h \geqq 0$ に対し $\hat{R}_h=\sum_{t=1}^{T-h} X_t X_{t+h}/(T-h)$ とおくとき ρ_h の推定には $\hat{\rho}_h=\hat{R}_h/\hat{R}_0$ や $\tilde{\rho}_h=(T-h)\hat{R}_h/T\hat{R}_0$ 等が用いられ，$\{X_t\}$ にいくつかの仮定を置いた上で $\{\sqrt{T}(\tilde{\rho}_h-\rho_h)\,;1\leqq h\leqq H\}$($H$ はあらかじめ定めた正整数)の確率分布が $T\to\infty$ のとき，平均値ベクトルが 0 のH次元正規分布に収束することが示され，その共分散行列等も求められている（Anderson-Walker [12], Anderson [11]）．また $EX_t=0$ とは限らず未知の場合に，X_t から平均値の推定量を引きさった残差系列を用いた推定量の確率分布等も論じられている（Ansley-Newbold [14], Ahn [2]）．

また，$\{X_t\}$ が t ごとに独立な確率変数列ですべて同じ正規分布に従うとき $\tilde{\rho}_h$ の確率分布等も求められていて，$\{X_t\}$ が独立な確率変数列であるかどうかの仮説検定も行うことが出来る (Anderson [11])．

ρ_h の推定量として通常用いられているのは $\hat{\rho}_h$ や $\tilde{\rho}_h$ であるが，応用面では他の推定量，例えば X_{t+h} が正，0，負に応じて 1，0，−1 に変換した値を用いる推定量（藤井 [61], Yaglom [110]）等が古くから用いられており，これらを含めて他に良い推定量がないかどうかを Yoshida-Kondo-Inagaki [115] ではかなり統一的に論じている．Porat [80] では，固定された h に対する $\hat{\rho}_h$ の有効性を，ARMA モデルとの関連において論じている．しかし古くからの問題であるが $\{\rho_h\}$ の最良の推定量を求めること等は，どのようなものを良いと考えるか等から始めて今後の研究を待たねばならない面も多い．

時系列の分析において，周期性の検出などスペクトルに関する推測は典型的な問題の1つとして古くから応用上もよく用いられてきている．ここでも $\{\rho_h\}$ の推定と同様に統一的に良い推定量等を導くことはその数学的扱いの複雑さ等からほとんどなされておらず，良いと考えられる推定量を構成して，その統計的性質を明らかにするという形で研究が進められている．

まず周期性の検出のためによく用いられている統計量としてピリオドグラム (periodogram) $I(\lambda)=|\sum_{t=1}^{T} X_t e^{-2\pi it\lambda}|^2/T$ がある．ここで λ は周波数で $-1/2<\lambda\leqq 1/2$ である．$\{\varepsilon_t\}$ を $E\varepsilon_t=0$, $V(\varepsilon_t)=\sigma^2$ で t ごとに独立な確率変数列とし複素数表示で書いて $X_t=\gamma e^{2\pi i(t\lambda_0+\alpha)}+\varepsilon_t$（$\gamma$ は正数）のように $\{X_t\}$ に強い周波数 λ_0 の波が含まれていると，Tが大きいとき $I(\lambda)$ は $\lambda=\lambda_0$ で大きな値をとり ($I(\lambda_0)=0(T)$)，その他の λ で $I(\lambda)$ の確率分布は，有限な平均値と分散を持つ確率分布に収束（法則収束）することが示され，これを用いて強い周波数 λ_0 の検出が出来ると云うものである (Brockwell-Davis [30] 等)．また $X_t=\varepsilon_t$ のとき $CI(\lambda)$（Cはある定数）の確率分布が $T\to\infty$ のとき自由度が 1 または 2 の χ^2 分布に収束するなど T を大きくしたときの $I(\lambda)$ の統計的性質はよく調べられている（Fuller [42], Brockwell-Davis [30] 等)．Nabeya-Tanaka [76] では，正規過程に対して，ピリオドグラムの確率分布のより精密な形での近似が示されている．

$I(\lambda)$ は古くから周期性の検出などに用いられてきているが，$I(\lambda)$ の分散は $T\to\infty$ としても小さくならず，$f(\lambda)$ の一致推定量にもならない．そこで，$I(\lambda)$ を少し平均化して使うことが考えられ，$W(\lambda)$ をTに関係し $-\infty<\lambda<\infty$ で定義された関数として

$$\hat{f}(\lambda)=\int_{-1/2}^{1/2} I(\mu)W(\lambda-\mu)d\mu \tag{2.4.1}$$

という形の推定量が提案されている．$W(\lambda)$ のことをウィンドウ (window) とよんでいる．$T\to\infty$ としたときの漸近的不偏性や $\hat{f}(\lambda)$ の分散が 0 に収束するためには，$W(\lambda)$ はいくつかの

条件（Anderson [11], Brockwell-Davis [30]，川嶋一酒井 [67], Yaglom [110] 等）をみたさなければならない．何らかの意味で最良の $W(\lambda)$ を見出すことは重要であるが簡単ではなく，良いと考えられるいくつかの $W(\lambda)$ が Blackmann-Tukey [24]（Hanning, Hamming という名称のついたウィンドウ），Bartlett [18], Parzen [78], Akaike [3] 等により提案されていて，漸近的な平均2乗誤差等は数式的に表現は可能であるが（Anderson [11]），一般的な比較はむずかしく，実用上はこれらのどれかが用いられている．Hanning, Hamming というのは $W_h=a_0+2a_1\cos(\pi h/H)$ とおいて $W(\lambda)=\sum_{j=-H}^{H} W_j\cos(2\pi j\lambda)$ で定義され，$a_0=0.50, a_1=0.25$ とするのが Hanning, $a_0=0.54, a_1=0.23$ とするのが Hamming である．H は正整数で，$T\to\infty$ のとき $H\to\infty$ となり $H/T\to 0$ 等の条件をみたすものである．(2.4.1) の形のスペクトル密度関数の推定量の，$T\to\infty$ としたときの数学的に厳密な形での検討は Bentkus-Rudzkis [22] 等でなされている．また bootstrapping を導入した推定についても論じらている（Franke-Hardle [41]）．

現在の1つの流れとして時系列に有限次元パラメータモデルをあてはめ，そのモデルをもとに自己相関係数やスペクトル密度関数の推定量を構成する方法もよく用いられている．有限次元パラメータモデルとしては AR(p) 過程モデルや MA(q) 過程モデル，一般的には ARMA (p, q) 過程モデルがよく用いられている．これらのモデルの場合，ρ_h や $f(\lambda)$ は 2.2 で述べたように $\{\phi_k;0\leqq k\leqq p\}$ や $\{\theta_l;0\leqq l\leqq q\}$ が定まれば定まる．従って 2.2 でも述べたように，たとえば $\{X_t\}$ を $EX_t=0$ である弱定常正規過程とし更に ARMA(p, q) 過程とすれば，$\{\phi_k;0\leqq k\leqq p\}$ や $\{\theta_l;0\leqq l\leqq q\}$ の最尤推定量は $T\to\infty$ のとき漸近的有効推定量となり，これらを用いて 2.2 で述べた形で構成された ρ_h や $f(\lambda)$ の推定量は漸近的有効推定量となる．従って $\{X_t\}$ が正確に正規弱定常過程で AR(p) 又は MA(q) 又は ARMA(p, q) 過程モデルに従っていれば，$\{\phi_k\}$ 又は $\{\theta_l\}$ の最尤推定量から構成するのがよいと云える．しかし現実のデータの場合には，たとえ AR 又は MA 過程であっても p や q の値を推定しなければならない場合が多いし，これらの値は∞かも知れない．2.2 で述べたように，p や q の値を推定するには AIC など種々の方法が提案されている．ここでは∞かも知れない場合を考えてみる．このときあてはめるモデルの p と q は T と関係させて変化させる必要があり，T が大きいときには p や q も大きくした方がよい．T が大きくても p や q が大きいと全体的に分散は大きくなる可能性があるため，バランスよく大きくする必要があり，精密な評価が必要になる（Berk [23] 等）．

p と q を固定して T を大きくすれば推定量の分散は小さくなるが，真の次数 p や q がこれら固定した値より大きいときには，偏りが大きくなる．Hamming や Hanning による推定量等ウィンドウを用いたノンパラメトリックな推定量は，H を T に関係させて大きくすること等により有限次元の AR 又は MA 又は ARMA モデルのあてはめによる推定量より分散が大きく不安定である．しかし，AR 又は MA 又は ARMA モデルのあてはめでも次数 p と q を T に応じて大きくしていけば，やはり分散は大きく不安定になっていく．時系列に，次元を固定した有限次元パラメータモデルをあてはめて解析する（時間領域での解析と呼ばれている）か時系列をフーリエ変換により周波数による表現に直し（周波数領域での解析と呼ばれている），ウィンドウを用いたノンパラメトリックな形で推定した方が良いかを含め，ρ_h や $f(\lambda)$ をどのような形で推定するのが最も良いかは更に今後の研究が必要である．

一般のスペクトル密度関数の推定を，有限次元パラメータで表現されるスペクトル密度関数で近似して推定するという立場で有限次元パラメータの推定を論じたものに Taniguchi [96], [97] がある．

$\{X_t\}$ を $E|X_t|^K<\infty$（K は整数で，$K\geqq 3$）とし，強定常過程で $EX_t=0$ とする．このとき任意な整数 $h_1, h_2, \cdots\cdots, h_{K-1}$ に対し，強定常性より

$$
\begin{aligned}
EX_tX_{t+h_1}X_{t+h_2}\cdots\cdots X_{t+h_{K-1}} &= EX_0X_{h_1}\cdots\cdots X_{h_{K-1}} \\
&= \int_{-1/2}^{1/2}\cdots\int_{-1/2}^{1/2}\exp\{2\pi i(\sum_{k=1}^{K-1}h_k\lambda_k)\}f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_{K-1}) \\
&\quad\times d\lambda_1 d\lambda_2\cdots\cdots d\lambda_{K-1}
\end{aligned}
$$

と書けるとき $f(\lambda_1, \lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_{K-1})$ のことをK次スペクトル密度関数という．$K=3$ のときは，バイスペクトル密度関数（bispectral density function）とも云う．これを用いて $\{X_t\}$ に関する線形性や正規性の検定が論じられている（Subba Rao-Gabr [92], Brockett-Hinichi-Patterson [29]）．たとえば $\{X_t\}$ が正規過程であれば $f(\lambda_1,\lambda_2)=0$ がすべての λ_1, λ_2 に対して成り立つ．$f(\lambda)$ の推定と同様に，$f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_{K-1})$ の推定も論じられている（Brillinger [28]）．奇数のKに対して $f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_{K-1})$ が 0 かどうかを調べることによって正規過程かどうかの必要条件のチェックは出来るであろう．しかし $\{X_t\}$ の確率的構造と $f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_{K-1})$ の値の大きさとの関係が十分に明確になっていない．今後，非正規性，非線形性の検討において重要な役割を果す量になるであろう．今後の研究の発展を期待したい．

2.4.2 非定常過程の場合

弱定常過程との類推から出発してスペクトル密度関数を考えるが，これが時間とともに変化するモデルが考えられている．$E|X|_t^2<\infty$ で $EX_t=0$ として

$$X_t=\int_{-1/2}^{1/2}A_t(\lambda)e^{2\pi it\lambda}dZ(\lambda)$$

と書けるような確率過程で oscillatory process と呼ばれるものがある（Priestly [82]，[83]）．ここで $A_t(\lambda)$ はある条件をみたす t と λ の関数であり，$Z(\lambda)$ は直交増分性を持つ確率過程で，$E|dZ(\lambda)|^2=f(\lambda)d\lambda$（一般には $dF(\lambda)$）となるものである．また，$E|X_t|^2<\infty$ で $EX_t=0$ として弱定常過程のスペクトル表現に似た形で

$$X_t=\int_{-1/2}^{1/2}\exp\{2\pi it\lambda\}dZ(\lambda)$$

と表現するが，弱定常過程の時のように $EdZ(\lambda)\overline{dZ(\lambda')}=0(\lambda\neq\lambda')$ とならないもの（harmonizable process とよばれている（Grenander-Rosenblatt [50]），相関構造に特殊な形を仮定するもの（Gray-Zhang [49]）など種々あり，Priestly [83] 等に推定に関する議論がなされているが，統計的な推測理論はそれほど多くの結果が得られておらず，今後の研究を期待したい．

2.5 多変量時系列の分析

観測される系列が複数個あってお互いに関連がありその関係を把握する必要がある場合は，複数個の系列をまとめて多変量時系列ととらえる必要がある．一つの時点において s 個の変量が観測されるという系列を，s 変量の時系列という．多変量の時系列は，1変量の場合と同様に数学的には多次元確率過程 $X_t=(X_{1,t},\cdots\cdots,X_{s,t})'$ の実現値として表現され，1変量の時系列に関する多くの議論が多変量の場合へ拡張できる（Hannan [52], Brillinger [28], Priestley [83]-Vol. 2, Brockwell-Davis [30] 等）．以下では，時点が離散的であり，X_t が実数値をとる場合について，定常過程を中心に考える．定常性については，弱定常，強定常ともに1変量の場合と同様に定義される．ただし平均は s 次元のベクトルに，分散は $s\times s$ の分散行列に置き換わる．以下，ここでは $EX_t=0$ とする．定常過程において重要な役割を果たす線形過程とは，係数行列 A_i，多次元のホワイトノイズ（イノベーション）$\{\varepsilon_t\}$ に対して

$$X_t=\sum_{i=0}^{\infty}A_i\varepsilon_{t-i}$$

と表される過程である．この過程は，$\sum_{i=0}^{\infty}\|A_i\|^2<\infty$ であるときに定義可能となる．ここで $\|\cdot\|$ は行列のノルムを表わす．このように，収束については，ベクトルあるいは行列に関する適当なノルム（作用素ノルムなど．AA′の最大固有値の平方根をAの作用素ノルムという）を用いることによって1変量における議論が拡張される．弱定常過程に対する自己共分散関数，自己相関関数，スペクトルなども定義できる．たとえば自己共分散関数は，時点差 h に対し $R_h=E(X_t-EX_t)(X_{t+h}-EX_{t+h})'$ と定義される．自己共分散関数は $R_h=R'_{-h}$ といった性質を持つ．ここで ′ は行列の転置を意味する．また，スペクトルについても同様である．たとえば線形過程に対するスペクトル密度関数は

$$f(\lambda)=\{\sum_{t=0}^{\infty}A_te^{2\pi it\lambda}\}\Gamma_\varepsilon\{\sum_{t=0}^{\infty}A_te^{2\pi it\lambda}\}^*$$

となる．ただし Γ_ε は ε_t の分散行列であり，$\{A\}^*$ は A の共役転置行列をあらわす．$f(\lambda)$ の対角成分は，個々の1変量の過程のスペクトル密度関数である．また，非対角成分の (l,m) 要素は，$X_{l,t}$ と $X_{m,t}$ のクロススペクトル密度関数と呼ばれる量となる．

有限個のパラメータを用いたモデルとしては，AR過程，MA過程，ARMA過程などが，形式的には1変量と同じ式で与えられる．たとえば ARMA(p,q) 過程は

$$X_t+A_1X_{t-1}+\cdots+A_pX_{t-p}=\varepsilon_t+B_1\varepsilon_{t-1}+\cdots+B_q\varepsilon_{t-q}$$

と表される．ここで A_i, B_j は係数行列である．このARMA過程が定常過程であるための条件は，AR部分に関する特性方程式

$$|I+A_1z+\cdots+A_pz^p|=0$$

の根が単位円の外にあること，すなわち絶対値が1より大であることである．このようなモデルについては，表現の一意性の問題が伴ってくる．この点については後述する．

また，状態空間表現とよばれる有限パラメータからなるモデルは，制御工学で広く用いられているものであるが（たとえば Kailath [65]），近年，一般的な多変量時系列モデルとしてよく用いられるようになってきている（Akaike [6], [7], [8], Aoki [15], Hannan-Deistler [53], Harvey [55] 等）．状態空間モデルは，

$$\begin{cases}X_{t+1}=AX_t+W_t\\ Y_t=CX_t+V_t\end{cases}$$

あるいは

$$\begin{cases}Z_t=FZ_{t-1}+K\varepsilon_t\\ Y_t=HZ_t\end{cases}$$

というように，直接には観測されない状態変数 X_t あるいは Z_t を用いて観測される系列 Y_t を表現するモデルである．ここで $\{W_t\},\{V_t\},\{\varepsilon_t\}$ はホワイトノイズを表わす．また，一般に $Y_t, X_t, Z_t, W_t, V_t, \varepsilon_t$ はベクトルであり，A, C, F, H, K は行列となる．共分散構造に関しては，ARMAモデルのクラスと，上記の状態空間モデルのクラスは同等であることがわかる（Akaike [7], Aoki [15]）．

多変量時系列に関しても，一変量の場合と同様，パラメトリックな推論，ノンパラメトリックな推論がある．$\{X_1,\cdots,X_T\}$ が与えられた系列であるとする．ノンパラメトリックな推論では，たとえば自己共分散関数の行列 R_h の推定量として，標本自己共分散関数 $\tilde{R}_h$ が定義できる．

$\tilde{R}_h=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-|h|}X_tX_{t+|h|}$（$EX_t=0$ でないときは X_t の代りに $X_t-\bar{X}$ を用いる．

$$\text{ここで } \bar{X}=\sum_{t=1}^{T}X_t/T.)$$

また，スペクトルについては，多変量ではクロススペクトル密度関数の推定が問題となるが，1変量の場合と同様，ピリオドグラムによる推論ができる．多変量では，次のようにして定義される行列がピリオドグラムと呼ばれる．

$$I(\lambda)=\zeta(\lambda)\zeta(\lambda)^*$$

$$\zeta(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}X_te^{2\pi it\lambda}.$$

また，$I(\lambda)$ は次のように表すこともできる．

$$I(\lambda)=\sum_{h=-T+1}^{T-1}\tilde{R}_he^{-2\pi ih\lambda}.$$

ピリオドグラム $I(\lambda)$ の非対角要素がクロススペクトル密度関数に対応する．1変量の場合と同様，ピリオドグラムは一致推定量とはならず，ウィンドウを用いてピリオドグラムを変換した統計量が用いられる（Hannan [52], Priestley [83]-Vol. 2 等）．

次に有限次元パラメータのモデルに関する推論について考える．多変量における問題の1つとして，同定（identification）問題がある．同定とは，観測値からモデルの構造を決定し，モデルに含まれるパラメータを推定するという一連の作業を意味する．このとき生じる理論的な問題は，観測値からモデルの構造を決定することが可能かどうかである．多変量の場合は1変量の場合と異なり，係数行列，分散行列に含まれる未知パラメータの個数が大きなものとなるためにこのような問題が生じる．構造が決定できるかどうかという問題は，正確には観測値に関する確率構造が与えられたときにモデルの構造を規定するパラメータを一意に定めることができるかどうかという問題と言ってよいが，一般には共分散構造から決定できるかどうかを意味することが多い．多変量時系列モデルでは，異なるパラメータによる表現であっても全く同じ確率構造を与えることがあり得る．すなわち，一意性を持つモデルにするためには，係数行列や分散行列に適当な制約条件を入れるか，行列に特定の構造を仮定する必要が生じる．ARMA モデルや状態空間モデルについて，どのような条件をおけば一意性のあるモデルが得られるかが議論されてきている（Aoki [15], Hannan-Deistler [53] 等）．実際に多変量時系列モデルを用いる場合には，先験的な情報を用いることによって一意的なパラメータの構造が得られることもある．しかし一般には観測値のみが利用可能な情報であり，観測値から得られる統計量によってモデルの構造を決定しなければならない．このとき，ARMA モデルの次数や状態空間表現における状態変数の次元も観測値によって決定する必要がある．代表的な同定方法として，観測される系列についての自己共分散行列と，モデルの係数行列およびホワイトノイズの分散の関係により構造を決定することが考えられる（Akaike [6]，[7]）．ここで自己共分散行列は，観測値から標本分散，標本共分散などを求めることにより推定可能である．たとえば状態空間モデルについては，自己共分散関数 R_h を要素とするハンケル行列

$$H(N)=\begin{pmatrix} R_1, & R_2, & \ldots, & R_N \\ R_2, & R_3, & \ldots, & R_{N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_N, & R_{N+1}, & \ldots, & R_{2N-1} \end{pmatrix}$$

の特異値分解を利用する方法などがある（Aoki [15]）．同じく状態空間モデルについては正準相関分析を用いたアプローチによる方法なども提案されている（Akaike [8]）．ARMAモデルについては，たとえばTiao-Box [99] やTsay-Tiao [102] による方法などがある．多変量ARモデルについては，赤池-中川 [9] も同定法を与えている．

モデルの構造が同定可能な形で与えられると，係数行列やホワイトノイズの分散行列に含まれている未知パラメータの推定は，最尤法など1変量の場合と同様な方法で行うことができる．弱定常過程に対するいろいろな推定量については一般的に議論されている．最尤推定量などの推定量は，適当な正則条件のもとでは一致性，漸近正規性を有することが示されている（Hannan-Deistler [53], Hosoya-Taniguchi [60] 等）．

最尤法における実際の尤度計算は，パラメータ数が多いために必ずしも簡単とは言えないが，たとえばホワイトノイズが正規分布に従っているような状態空間モデルの尤度計算においては，カルマンフィルタが有効なアルゴリズムとなる（Harvey [55]）．

多変量時系列における他の話題としては，因果性の問題や，トレンドあるいはintegrated processに関する問題等がある．複数の系列間の関係を論ずるときに重要な意味を持つのが因果関係である．Grangerの意味での因果性と呼ばれる，統計的な因果関係についての分析についてはGranger [46]，山本 [114] がくわしい．多変量時系列の場合も，実際に得られる系列は非定常であることが多く，トレンドを考慮に入れる必要がある．ここでトレンドとは，平均値関数を意味する確定的なトレンドと，ランダムウォークで表されるような確率的トレンドの2つの場合がある．近年は確率的トレンドに関する議論が多くなされている（3.1「経済学における時系列分析」参照）．多変量時系列におけるトレンドの扱いは，1変量の場合と異なり簡単ではないが，各成分ごとに1変量の時系列として扱ってトレンドを除去する方法等が考えられる．トレンドが除去されれば多変量の定常時系列として扱うことができる．しかし，この方法はモデルの解釈の点で難があり，また，相互間の関係についての情報が失われてしまう可能性もある．多変量時系列の場合には，各成分ごとに独立なトレンドを持つと考えるよりも，共通なトレンドが存在すると考えた方が自然であることが多いと指摘する文献もある（Stock-Watson [90], Harvey [55]）．確率的な共通トレンドを持つ場合は，状態空間表現によってモデル化することができる（たとえばStock-Watson [90]）．また，以上のことに関連し，コインテグレーション（共和分）が存在する場合（Engle-Granger [40]）の問題もある．たとえば，各成分はintegrated processであるにもかかわらずそれらのある線形結合が定常過程になる場合，コインテグレーションが存在すると言う．コインテグレーションは経済時系列において重要な意味をもち，近年いろいろと議論されている．これらの問題については3.1の「経済学における時系列分析」を参照されたい．

2.6 予　　測

時系列を観測したとき，それらのデータをもとに将来の値を予測しなければならないという問題は，多くの分野において現実の問題として生じ，古くから種々の方法が提案されてきている．数学的には定常過程論のなかで，過去の時点 $-\infty$ から現時点まですべての値が観測され（もちろん，過去の有限個の時点の値が観測された場合も理論展開が可能であるが），共分散関数がすべて既知であるという仮定のもとで，最良の線形予測量の構成が論じられてきている（Doob

[38], Grenander-Rosenblatt [50], Brockwell-Davis [30], Wiener [107], 藤井 [61] 等). これらは云わば確率論的取扱いであるが, 統計学的な一般の問題としては, 現時点を t_0 として, $t_0-(T-1), t_0-(T-2), \cdots\cdots, t_0-1, t_0$ で値を観測して $t_0+\tau(\tau=1,2,\cdots\cdots)$ の値を予測しようとする場合で, 通常自己共分散等はすべて未知である.

まず $\{X_t\}$ が $EX_t=0$ の弱定常過程の場合には正整数Kを適当に定めて

$$Q=\frac{1}{T}\sum_{t=t_0-(T-1)+K+\tau}^{t_0}(X_t-\phi_0X_{t-\tau}-\cdots\cdots-\phi_KX_{t-\tau-K})^2$$

を最小にする $\{\phi_k\}$ を求めてそれを $\{\hat{\phi}_K\}$ とし, $X_{t_0+\tau}$ の予測量を

$$\hat{X}_{t_0+\tau}=\hat{\phi}_0X_{t_0}+\hat{\phi}_1X_{t_0-1}+\cdots\cdots+\hat{\phi}_KX_{t_0-K} \tag{2.6.1}$$

とするもので, 若干の条件のもとで $T\to\infty$ のとき最良線形予測量になることなどが示される. Wiener の予測方法も離散時間で統計的な問題として書き直すとこの形になる. 有限次元パラメータモデルに従う弱定常過程については, そのモデルを用いて, 更に良い予測量が構成できる (Brockwell-Davis [30] 等).

非線形な予測量については確率論的な扱いでは Masani-Wiener [75] 等の論文が発表されているが, 統計的な形ではあまり見当らない.

非定常な時系列の予測については, 一般論は論じにくく個々のモデルについてはいくつか詳しく論じられたり, 手法が提案されている. まず, 2.3 でも述べた非定常時系列の予測から述べることにする. 時系列 $\{Y_t\}$ が

$$Y_t=m_t+X_t$$

とあらわされている場合については, よく研究されている. ここで, m_t は t により定まる関数 (確率変数ではない) で $EY_t=m_t$ であり, $\{X_t\}$ は $EX_t=0$ の確率過程である. 通常は 2.3 で述べたように m_t が J 個の既知の関数 $m_t^{(1)}, m_t^{(2)},\cdots\cdots, m_t^{(J)}$ (たとえば $m_t^{(j)}=\exp(-t)$) の 1 次結合, 即ち $m_t=\sum_{j=1}^{J}C_jm_t^{(j)}$ で書けている等の仮定を設けて, 時点 t_0 までの標本を用いて最小 2 乗法で $\{C_j\}$ の推定量 $\{\hat{C}_j\}$ を求め, m_t の推定量 $\hat{m}_t=\sum_{j=1}^{J}\hat{C}_jm_t^{(j)}$ を求め, 時点 $(t_0+\tau)$ の値の予測にはまず単純に $\hat{m}_{t_0+\tau}$ を用いる. $m_{t_0+\tau}$ を推定するための $\hat{m}_{t_0+\tau}$ の良さについては, $\{X_t\}$ に弱定常性等いくつかの仮定をおいて標本数を大にしたときの漸近的有効性などが示されている (Grenander-Rosenblatt [50], Anderson [11] 等). $\{X_t\}$ が弱定常過程の場合には, $X_{t_0+\tau}$ の予測量としては t_0 までに得られた標本について $\tilde{X}_t=Y_t-\hat{m}_t$ をつくり, $\{\tilde{X}_t\,;\,t_0-(T-1)\leq t\leq t_0\}$ を用い, (2.6.1) における X_t を $\tilde{X}_t$ でおきかえて $X_{t_0+\tau}$ の予測量 $\hat{X}_{t_0+\tau}$ を求め, 最終的な $Y_{t_0+\tau}$ の予測量を

$$\hat{Y}_{t_0+\tau}=\hat{m}_{t_0+\tau}+\hat{X}_{t_0+\tau}$$

とする. $\hat{Y}_{t_0+\tau}$ はTが大のとき線形予測量のなかで漸近的な意味で平均 2 乗予測誤差を最小にするものであること等を示すことが出来る. 問題は $\{X_t\}$ が非定常な場合であるが, これは簡単ではない. $\{X_t\}$ の分散・共分散構造が何らかの形で有限次元パラメータで記述される場合には, まず単純な最小 2 乗法で $\hat{m}_t$ を求め, $\tilde{X}_t=Y_t-\hat{m}_t$ をつくり, $\{\tilde{X}_t\}$ を用いて有限次元パラメータの推定を行い, $\{X_t\}$ の分散・共分散構造を推定して, 一般化最小 2 乗法により $\{C_j\}$ の推定量を求め, $m_{t_0+\tau}$ の推定量を求める, あるいはこれをくりかえす方法など提案している論文等があ

るが（$\{C_j\}$ の推定を論じたものに Harvey-Robinson [57] 等），あまり多くは見当らない．$\{X_t\}$ の性質に強く依存した取り扱いがほとんどであり，更により良い方法の研究が今後期待される．

非定常な時系列のモデルとしての ARIMA 過程の場合の予測法について述べることにする（2.3 参照）．$\{Y_t\}$ が ARIMA(p, d, q) 過程の場合，$\nabla^d Y_t = X_t$ であり，$\{X_t\}$ は弱定常過程であるから標本 $\{X_t\,;1 \leqq t \leqq t_0\}$ を用いて（2.6.1）により X_{t_0+1} の予測量 $\hat{X}_{t_0+1}$ を求めることが出来る．この場合 $\{X_t\}$ は ARMA(p, q) 過程であるから，モデルのパラメータを推定してそれを用いて過去の値による線形予測量も構成することが出来る．そして $\nabla^d Y_{t_0+1} = X_{t_0+1}$ の関係を利用し，X_{t_0+1} の代りに $\hat{X}_{t_0+1}$ を用いて Y_{t_0+1} の予測量 $\hat{Y}_{t_0+1}$ を求めることが出来る．次に Y_{t_0+2} の予測量は Y_{t_0+1} の代りに $\hat{Y}_{t_0+1}$ を用い，これと $\hat{X}_{t_0+2}$ により予測量 $\hat{Y}_{t_0+2}$ をつくることが出来る．以下 $\hat{Y}_{t_0+3}, \hat{Y}_{t_0+4}, \cdots\cdots$ も同様である．以上が Box-Jenkins [26] により示されている方法の概略である．話はこまかくなるが標本からの予測量の構成法にはいくつかの方法があり得るし，どのような方法が最良であるか，又 $\{X_t\,; t \leqq 0\}$ の標本は使用出来ないことなど，理論的立場からはもう少し詳細な検討が必要であろう．時系列の中には 12 ヶ月ごとに似た変動を行うものなど強い周期性（季節変動）を持つものも多い．このような時系列の統計的分析，特に予測法も論じられている．1つの強い周期 s を持つという簡単な場合を考えると，Box-Jenkins [26] 流の方法では，$Y_t - Y_{t-s} = (1 - B^s) Y_t = X_t$ をつくり $\{X_t\}$ が弱定常 ARMA(p, q) 過程であるというモデルで，予測法などを論じている．トレンドの推定と関連させて Box-Pierce-Newbold [27] でも論ぜられている．他には $Y_t = m_t + X_t$ というモデルを仮定して最小 2 乗法による $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_s$ の推定や X_{T_0+l} の予測量を求める方法について論じた論文（Huzii [62]）等がある．

次に，2.5 で述べた状態空間モデルにおける予測を考える．状態空間モデルは，多変量時系列に限らず 1 変量時系列のモデルとしてもよく使われるが，その一つの理由はカルマンフィルタが利用できるという点にある．状態空間モデル

$$\begin{cases} X_{t+1} = AX_t + W_t \\ Y_t = CX_t + V_t \end{cases}$$

において，$\{W_t\}, \{V_t\}$ は互いに無相関である正規ホワイトノイズであるとして，それぞれの共分散行列を R, Q とおく．このとき，与えられたデータ $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_T\}$ による状態変数 X_T，あるいは X_{T+1} の推定を考える（状態推定と呼ばれる）．平均 2 乗誤差を最小にするという意味で最良な推定量は条件付き期待値で与えられる．ここで $\hat{X}_{t|t} = E(X_t | Y_1, \ldots, Y_t)$, $\hat{X}_{t+1|t} = E(X_{t+1} | Y_1, \ldots, Y_t)$ とおくと，$\hat{X}_{t|t}, \hat{X}_{t+1|t}$ はカルマンフィルタと呼ばれる次のような漸化式で与えられる（Kalman [66], Aoki [15]）．

$$\begin{aligned} \hat{X}_{t+1|t} &= A\hat{X}_{t|t} \\ \hat{X}_{t|t} &= (I - K_t C)\hat{X}_{t|t-1} + K_t Y_t \\ K_t &= P_t C'(CP_t C' + Q)^{-1} \\ P_{t+1} &= A\{P_t - P_t C'(CP_t C' + Q)^{-1} CP_t\}A' + R \qquad (t \geqq 0) \end{aligned}$$

ただし，$\hat{X}_{0|-1} = X_0$, $P_0 = \mathrm{Var}\{X_0\}$ である．こうして得られる $\hat{X}_{T|T}, \hat{X}_{T+1|T}$ は，ホワイトノイズの従う分布が正規分布でない場合でも，線形推定量の中ではある意味で最適な推定量となっている．

与えられた観測値 $\{Y_1, \ldots\ldots, Y_{t_0}\}$ によって $Y_{t_0+\tau}$ を予測することが目的である場合（$\tau > 0$），上で述べたカルマンフィルタが直接利用できる．すなわち，$\hat{Y}_{t_0+\tau} = CA^{\tau-1}\hat{X}_{t_0+1|t_0}$ が予測量として得られる．また，$P_t = E(X_t - \hat{X}_{t|t-1})(X_t - \hat{X}_{t|t-1})'$ であることを用いれば予測誤差の分散の評価ができる．たとえば $\tau = 1$ のとき，$E(Y_{t_0+1} - \hat{Y}_{t_0+1})(Y_{t_0+1} - \hat{Y}_{t_0+1})' = CP_{t_0+1}C' + Q$ となる．

以上はパラメータが既知の場合であるが，実際は未知であることが多く，未知パラメータが存在する場合の予測について考える必要がある（Watanabe [104]）．実際には，パラメータを最尤法などで推定し，得られた推定値をカルマンフィルタに代入する方法がよく用いられる．

なお，状態空間モデルに限らず，未知パラメータを含むモデルを用いて予測を行うときの問題として，パラメータ推定に用いる系列と予測すべき系列は独立であるか，あるいは同一の系列かがある．定常過程においてはこれらの差は小さく，一般には独立な系列を用いると仮定して予測誤差の評価を行うことが多い（Yamamoto [113], Kunitomo-Yamamoto [70] 等）．しかし，非定常の場合は事情が異なり，予測誤差の性質は，同一系列か，独立系列かに大きく依存することが示されている（Fuller [43], Watanabe [105]）．

ここで示した状態空間モデルは定係数で入力がホワイトノイズのみの場合であるが，時変係数であっても，あるいは外生変数が入力に加わっても同様なカルマンフィルタが得られる．また，上では X_T や X_{T+1} の推定量を得るアルゴリズムを示したが，$X_k(1\leqq k<T)$ を推定(補間)するアルゴリズムも得られる．このような結果は，欠測値の処理へ応用できる(Harvey-Pierse [56], Ansley-Kohn [13] 等)．

また，状態空間モデルを拡張することも行われている．Kitagawa [69] は，非線形・非ガウス型のモデルに対する一般的なフィルタを与えている．Kitagawa のフィルタはカルマンフィルタの拡張であり，予測その他へ応用することができる．

時系列の予測方法のなかには古くから使用されてきているが，統計の理論的立場からはまだ十分に検討が進んでいなかったり，ほとんど手がつけられていなくて今後の検討を待たなければならないものも多い．Brown [31], Makridakis et al. [73] 等には，時系列の多くの予測手法が述べられているが，それらの多くはその手法の良さについての理論的検討がまだ十分に行われていないものである．たとえばそのなかに最も単純なものとして指数平滑法というのがある．これは初期値 X_0 と $|\beta|\leqq 1$ である定数 β を適当に定め，X_1 の予測量を $\hat{X}_1=X_0$ とし，X_2 の予測量を $\hat{X}_2=\beta\hat{X}_1+(1-\beta)X_1$ とし，一般に X_{t_0+1} の予測量を $\hat{X}_{t_0+1}=\beta\hat{X}_{t_0}+(1-\beta)X_{t_0}$ とするものである．β をどう定めるかという問題であるが，Makridakis et al. [73] では過去のデータを用いて最小2乗法で求めることを提案している．Makridakis et al. [73] では，指数平滑法以外に実用上用いられている多くの予測法を紹介し，その比較をいくつかの実際のデータを用いて行っている．それぞれ特徴を持っていることが示されている．Abraham-Ledolter [1], Harvey [55] ではいくつかの予測方法をまとめて論じ比較検討されている．Durbin [39] でも関連したテーマが扱われている．推測統計の理論的立場からこれらの方法の良さや統計的性質を検討した論文はあまり発表されていない．Chen-Huzii [34] では，指数平滑法において Makridakis et al. al. [73] で提案されている β の定め方について検討し，標本数を大にした時のその β の収束性や分布等を論じている．Makridakis *et. al* [73] で示されている多くの予測方法は，時系列が定常性を持つ場合でも非定常な場合でも，かなり広範囲の時系列に対して用いることが出来るものであるであろう．推測統計の立場から，これらの予測法の良さを明らかにしていくことが期待される．

謝辞：この報告書を作成するにあたり，レフェリーの方からは貴重なコメントをいただきました．また主として2に関して，東京工業大学の宇佐美嘉弘氏と陳春航氏は原稿を何度も読んで誤りを指摘して下さり，両氏と同大学水野雅子さんには文献表作成や原稿作成でお世話になりました．ここに深く感謝の意を表します．

参考文献

[1] Abraham, B. and Ledolter, J. (1986). Forecast functions implied by autoregressive integrated moving average models and other related forecast procedures, *Internat. Statist. Rev.*, **54**, 51-66.

[2] Ahn, S. K. (1988). Distribution for residual autocovariances in multivariate autoregressive models with structured parameterization, *Biometrika*, **75**, 590-593.

[3] Akaike, H. (1962). On the design of lag window for the estimation of spectra, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **14**, 1-21.

[4] Akaike, H. (1969). Power spectrum estimation through autoregressive model fitting, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **21**, 407-419.

[5] Akaike, H. (1969). Fitting autoregressive models for prediction, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **21**, 243-247.

[6] Akaike, H. (1974a). Stochastic theory of minimal realization, *IEEE Trans. Automat.Control*, AC-**19**, 667-674.

[7] Akaike, H. (1974b). Markovian representation of stochastic processes and its application to the analysis of autoregressive moving average processes, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **26**, 363-387.

[8] Akaike, H. (1976). Canonical correlation analysis of time series and the use of an information criterion, *System Identification : Advances and Case Studies* (R. H. Mehra and D. G. Lainiotis, eds.), 27-96, Academic Press.

[9] 赤池弘次, 中川東一郎 (1972). ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンス社 (英訳:H. Akaike and T. Nakagawa (1988), *Statistical Analysis and Control of Dynamic Systems*, Kluwer Academic Publishers).

[10] Anderson, T. W. (1963). Determination of the order of dependence in normally distributed time series, *Proceedings of the Symposium on Time Series Analysis* (M. Rosenblatt, ed.), John Wiley & Sons.

[11] Anderson, T. W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series*, John Wiley & Sons.

[12] Anderson, T. W. and Walker, A. M. (1964). On the asymptotic distribution of the autocorrelations of a sample from a linear stochastic process, *Ann. Math. Statist.*, **35**, 1296-1303.

[13] Ansley, C. F. and Kohn, R. (1985). Estimation, filtering, and smoothing in state space models with incompletely specified initial conditions, *Ann. Statist.*, **13**, 1286-1316.

[14] Ansley, C. F. and Newbold, P. (1979). On the finite sample distribution of residual autocorrelations in autoregressive-moving average models, *Biometrika*, **66**, 547-553.

[15] Aoki, M. (1990). *State Space Modeling of Time Series, 2nd ed.*, Springer-Verlag.

[16] Baillie, R. T. (1979). The asymptotic mean squared error of multistep prediction from the regression model with autoregressvie errors, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **74**, 175-184.

[17] Bankovi, G. Veliczky, J. and Ziermann, M. (1981). Multivariate time series analysis and forecast, *Probability and Statistical Inference ; Proceedings of the 2nd Pannonian Symposium on Mathematical Statistics*, Bad Tatzmannsdorf, Austria, June 14-20, 1981, 29-34.

[18] Bartlett, M. S. (1950). Periodogram analysis and continuous spectra, *Biometrika*, **37**, 1-16.

[19] Bartlett, M. S. (1955). An Introduction to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications, Cambridge Univ. Press (日本語訳;津村善郎他訳 (1968), 確率過程入門—理論と応用, 東京大学出版会).

[20] Basawa, I. V. and Prakasa Rao, B. L. S. (1980). *Statistical Inference for Stochastic Processes*, Academic Press.

[21] Basawa, I. V. and Prakasa Rao, B. L. S. (1980). Asymptotic inference for stochastic processes, *Stochastic Process. Appl.*, **10**, 221-254.

[22] Bentkus, R. Y. and Rudzkis, R. A. (1982). On the distribution of some statistical estimates of spectral density, *Theory Probab. Appl.*, **XXVII**, 795-813.

[23] Berk, K. N. (1974). Consistent autoregressive spectral estimates, *Ann. Statist.*, **2**, 489-502.

[24] Blackmann, R. B. and Tukey, J. W. (1958). *The Measurement of Power Spectra*, Dover.

[25] Bloomfield, P. (1973). An exponential model for the spectrum of a scalar time series, *Biometrika*, **60**, 217-226.

[26] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis ; Forecasting and Control*, revised

edition, Holden-Day.

[27] Box, G. E. P., Pierce, D. A. and Newbold, P. (1987). Estimating trend and growth rates in seasonal time series, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **82**, 276-282.

[28] Brillinger, D. R. (1981). *Time Series : Data Analysis and Theory*, Holden-Day.

[29] Brockett, P. L., Hinich, M. J. and Patterson, D. (1988). Bispectral-based tests for the detection Gaussianity and linearity in time series, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **83**, 657-664.

[30] Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (1991). *Time Series : Theory and Methods* (*2nd ed.*), Springer-Verlag.

[31] Brown, R. G. (1962). *Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series*, Prentice-Hall.

[32] Burridge, P. and Wallis, K. F. (1988). Prediction theory for autoregressive moving average processes, *Econometric Rev.*, **7**, 65-95.

[33] Chan, N. H. and Wei, C. Z. (1987). Asymptotic Inference for nearly nonstationary AR (1) processes, *Ann. Statist.*, **15**, 1050-1063.

[34] Chen, C. and Huzii, M. (1993). Properties of least squares methods for choosing the parameter of the simple exponential smoothing predictor, *Statistical Sciences and Data Analysis ; Proceedings of the 3rd Pacific Area Statistical Conference* (K. Matusita et al., eds.), VSP International Science Publishers, Zeist, Netherlands, 129-141.

[35] Choi, B. S. (1992). *ARMA Model Identification*, Springer-Verlag.

[36] Cramér, H. (1946). A contribution to the theory of statistical estimation, *Skand. Aktuarietidskr.*, **29**, 85-94.

[37] Dehay, D. (1991). On the product of two harmonizable time series, *Stochastic Process.Appl.*, **38**, 347-358.

[38] Doob, J. L. (1953). *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons.

[39] Durbin, J. (1983). Extensions of the Brown and Holt-Winters forecasting systems and their relation to Box-Jenkins models, *Time Series Analysis : Theory and Practice* **3** (O. D. Anderson, ed.), North-Holland, 7-18.

[40] Engle, R. F. and Granger, C. W. J. (1987). Co-integration and error correction : representation, estimation and testing, *Econometrica*, **55**, 251-276.

[41] Franke, J. and Härdle, W. (1992). On bootstrapping kernel spectral estimates, *Ann. Statist.*, **20**, 121-145.

[42] Fuller, W. A. (1976). *Introduction to Statistical Time Series*, John Wiley & Sons.

[43] Fuller, W. A. (1985). Nonstationary autoregressive time series, *Handbook of Statistics, vol. 5* (E. J. Hannan et al., eds.), Notrh-Holland, 1-23.

[44] Glejser, H. (1969). A new test for heteroskedasticity, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **64**, 316-323.

[45] Goldfeld, S. M. and Quandt, R. E. (1965). Some tests for homoscedasticity, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **60**, 539-547.

[46] Granger, C. W. J. (1969). Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods, *Econometrica,* **37**, 161-194.

[47] Granger, C. W. J. (1980). Long memory relationships and the aggregation of dynamic models, *J. Econometrics*, **14**, 227-238.

[48] Granger, C. W. J. and Andersen, A. P. (1978). *An Introduction to Bilinear Time Series Models*, Vandenhoeck & Ruprecht.

[49] Gray, H. L. and Zhang, N. F. (1988). On a class of nonstationary processes, *J. Time Ser. Anal.*, **9**, 133-154.

[50] Grenander, U. and Rosenblatt, M. (1957). *Statistical Analysis of Stationary Time Series*, John Wiley & Sons.

[51] Haggan, V. and Ozaki, T. (1980). Amplitude-dependent exponential AR model fitting for non-linear random vibrations, *Time Series* (O. D. Anderson, ed.), North-Holland, 57-71.

[52] Hannan, E. J. (1970). *Multiple Time Series*, John Wiley & Sons.

[53] Hannan, E. J. and Deistler, M. (1988). *The Statistical Theory of Linear Systems*, John Wiley & Sons.

[54] ハーベイ, A. C. (国友一山本訳) (1981). 時系列モデル入門, 東京大学出版会.

[55] Harvey, A. C. (1989). *Forecasting, Structual Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambrid-

ge Univ. Press.
[56] Harvey, A. C. and Pierse, R. G. (1984). Estimating missing observations in economic time series, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **79**, 125-131.
[57] Harvey, A. C. and Robinson, P. M. (1988). Efficient estimation of nonstationary time series regression, *J. Time Ser. Anal.*, **9**, 201-214.
[58] Hosking, J. R. M. (1981). Fractional differencing, *Biometrika*, **68**, 165-176.
[59] Hosoya, Y. (1979). High-order efficiency in the estimation of linear processes, *Ann. Statist.*, **7**, 516-530.
[60] Hosoya, Y. and Taniguchi, M. (1982). A central limit theorem for stationary processes and the parameter estimation of linear processes, *Ann. Statist.*, **10**, 132-153.
[61] 藤井光昭 (1974). 時系列解析（現代応用数学講座３），コロナ社
[62] Huzii, M. (1990). The robustness of a predictor for a seasonal time series, *J. Japan Statist. Soc.*, **20**, 137-148.
[63] Huzii, M. and Toyooka, Y. (1977). Asymptotic properties of weighted least squares estimators in a polynomial regression with a nonstationary error process, *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE*, **24**, 191/11-199/19.
[64] 伊藤　清 (1953). 確率論，岩波書店．
[65] Kailath, T. (1980). *Linear Systems*, Prentice-Hall.
[66] Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems, *Trans. ASME J. Basic Engrg.*, **82**, 35-45.
[67] 川嶋弘尚，酒井英昭 (1989). 現代スペクトル解析，森北出版．
[68] Kim, W. K., Billard, L. and Basawa, I. V. (1990). Estimation for the first-order diagonal bilinear time series model, *J. Time Ser. Anal.*, **11**, 215-229.
[69] Kitagawa, G. (1987). Non-Gaussian state-space modeling of nonstationary time series (with discussion), *J. Amer. Statist. Assoc.*, **82**, 1032-1063.
[70] Kunitomo, N. and Yamamoto, T. (1985). Properties of predictors in misspecified autoregressive time series models, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **80**, 941-950.
[71] Liptser, R. S. and Shiryayev, A. N. (1977). *Statistics of Random Processes I : General Theory*, Springer-Verlag.
[72] Liptser, R. S. and Shiryayev, A. N. (1978). *Statistics of Random Processes II : Applications*, Springer-Verlag.
[73] Makridakis, S., Andersen, A. , Carbone, R., Fildes, R., Hibon, M. Lewandowski, R., Newton, J., Parzen, E. and Winkler,R. (1982). The accuracy of extrapolation (time series) methods: results of a forecasting competition, *J. Forecasting*, **1**, 111-153.
[74] Mann, H. B. and Wald, A. (1943). On the statistical treatment of linear stochastic difference equations, *Econometrica*, **11**, 173-220.
[75] Masani, P. and Wiener, N. (1959). Non-linear prediction, *Probability and Statistics, The H. Cramêr Volume* (U. Grenander, ed.), John Wiley & Sons, 190-212.
[76] Nabeya, S. and Tanaka, K. (1986). Approximate distributions of the periodogram and related statistics under normality, *Econometric Theory*, **2**, 33-65.
[77] 岡本雅典 (1991). ペリオドグラムによる fractional differencing parameter の推定—日別為替レートの長期記憶時系列モデルに関連して—，広島大学経済論叢，**14**, 43-55.
[78] Parzen, E. (1957). On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series, *Ann. Math. Statist.*, **28**, 329-348.
[79] Pham, T. D. and Tran, L. T. (1981). On the first-order bilinear time series model, *J. Appl. Probab.*, **18**, 617-627.
[80] Porat, B. (1987). Some asymptotic properties of the sample covariances of Gaussian autoregressive moving-average processes, *J. Time Ser. Anal.*, 8, 205-220.
[81] Pötscher, B. M. (1989). Model selection under nonstationarity: autoregressive models and stochastic linear regression models, *Ann. Statist.*, **17**, 1257-1274.
[82] Priestley, M. B. (1965). Evolutionary spectra and non-stationary processes, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **27**, 204-237.
[83] Priestley, M. B. (1981), *Spectral Analysis and Time Series*, Vols. 1 and 2, Academic Press.

[84] Quenouille, M. H. (1947). A large-sample test for the goodness of fit of autoregressive schemes, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **110**, 123-129.

[85] Rosenblatt, M. (1985). *Stationary Sequences and Random Fields*, Birkhäuser.

[86] Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model, *Ann. Statist.*, **6**, 461-464.

[87] Shibata, R. (1976). Selection of the order of an autoregressive model by Akaike's information criterion, *Biometrika*, **63**, 117-126.

[88] Shiryaev, A. N. (1960). Some problems in the spectral theory of higher-order moments. I, *Theory Probab. Appl.*, **V**, 265-284.

[89] Stock, J. H. and Watson, M.W. (1988). Testing for common trends, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **83**, 1097-1107.

[90] Stock, J. H. and Watson, M.W. (1991). A probability model of the coincident economic indicators, *Leading Economic Indicators : New Approaches and Forecasting Records* (K. Lahiri and G. H. Moore, eds.) 63-89, Cambridge Univ. Press.

[91] Subba Rao, T. (1981). On the theory of bilinear time series models, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **43**, 244-255.

[92] Subba Rao, T. and Gabr, M. M. (1980). A test for linearity of stationary time series, *J. Time Ser. Anal.*, **1**, 145-158.

[93] Subba Rao, T. and Gabr, M. M. (1984). *An Introduction to Bispectral Analysis and Bilinear Time Series Models*, Springer-Verlag.

[94] 杉原左右一 (1984). 時系列の統計的研究, 東洋経済新報社.

[95] Tanaka, K. (1984). An asymptotic expansion associated with the maximum likelihood estimators in ARMA models, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **46**, 58-67.

[96] Taniguchi, M. (1981). An estimation procedure of parameters of a certain spectral density model, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **43**, 34-40.

[97] Taniguchi, M. (1987). Minimum contrast estimation for spectral densities of stationary processes, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **49**, 315-325.

[98] Taniguchi, M. (1991). *Higher Order Asymptotic Theory for Time Series Analysis ; Lecture Notes in Statistics*, **68**, Springer-Verlag.

[99] Tiao, G. C. and Box, G. E. P. (1981). Modeling multiple time series with applications, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **76**, 802-816.

[100] Tong, H. and Lim, K. S. (1980). Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data (with Discussion), *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **42**, 245-292.

[101] Toyooka, Y. (1986). Second-order risk structure of GLSE and MLE in a regression with a linear process, *Ann. Statist.*, **14**, 1214-1225.

[102] Tsay, R. S. and Tiao, G. C. (1989). Model specification in multivariate time series (with discussion), *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **51**, 2, 157-213.

[103] Walker, A. M. (1964). Asymptotic properties of least-squares estimates of parameters of the spectrum of a stationary non-deterministic time-series, *J. Austral. Math. Soc.*, **4**, 363-384.

[104] Watanabe, N. (1985). Note on the Kalman filter with estimated parameters, *J. Time Ser. Anal.*, **6**, 269-278.

[105] Watanabe, N. (1987). On the estimation error of the Kalman filter with unknown parameters, *J. Japan Statist. Soc.*, **17**, 61-73.

[106] Whittle, P. (1953). Estimation and information in stationary time series, *Arkiv för Mathematik*, **2**, 423-434.

[107] Wiener, N. (1949). *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications*, The Technology Press of M. I. T and John Wiley & Sons.

[108] Wiener, N. and Masani, P. (1957). The prediction theory of multivariate stochastic processes, I, *Acta Math.*, **98**, 111-150.

[109] Wiener, N. and Masani, P. (1958). The prediction theory of multivariate stochastic processes, II, *Acta Math.*, **99**, 93-137.

[110] Yaglom, A. M. (1987). *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions, I : Basic Results, and II : Supplementary Notes and References*, Springer-Verlag.

[111] Yajima, Y. (1985). On estimation of long-memory time series models, *Austral. J. Statist.*, **27**, 303

-320.
[112] 矢島美寛 (1989). Long-Memory モデルとその統計的性質，日本統計学会誌，**19**, 219-236.
[113] Yamamoto, T. (1981). Predictions of multivariate autoregressive-moving average models, *Biometrika*, **68**, 485-492.
[114] 山本　拓 (1987). 経済の時系列分析，創文社.
[115] Yoshida, M., Kondo, M. and Inagaki, N. (1984). Asymptotic properties of several estimators of the autocorrelation based on limiter estimating functions for a stationary Gaussian process with additive outliers, *J. Japan Statist. Soc.*, **14**, 157-168.

3. いくつかの分野における時系列分析

3.1 経済学における時系列分析

田　中　勝　人

3.1.1 はじめに

経済学に限らず，時系列モデルによる分析が広く使われるようになったのは，Box-Jenkins [2] による所が大きい．彼らは，同定 (identification)，推定 (estimation)，診断 (diagnostic checking)，予測 (forecasting) という一連の段階的手続きとして時系列分析を定式化した．このようなモデル・ビルディングの発想は，コンピュータの進展と相俟ってパッケージ化され，経済学の分野でも広く使われるようになった．特に，経済変数の予測については，同時方程式の場合と比較して，大きなメリットがあった．しかし，彼らの方法は一変量の分析に留まっており，変数間の関係を考慮した経済理論仮説の検証に対しては，多変量時系列モデルに基づく方法が必要であった．

これに対して，Sims [25]，[26] は多変量自己回帰 (VAR) モデルを使って，Granger [10] が提唱した因果性の仮説検定を試みて非常に有意義な結論を得た．その後，さまざまの経済理論仮説の検証が VAR モデルに基づいて行われ，VAR 分析は 80 年代後半までの実証研究の主流となった．

3.1.2 非定常性

一変量，多変量を問わず，上述の時系列分析では，分析対象となる変数にあくまでも定常性を仮定している．確かに，ARIMA (p, d, q) モデルは，非定常時系列もその射程内にあるが，決して原データそのものを分析するのではなく，d 回の階差を施して定常とみなされた系列を分析するものであり，種々の統計量の分布は正則な場合の理論が適用可能である．VAR モデルによる分析についてもしかりである．すなわち，非定常性は，和分により生じたもの（そのような系列は和分過程 (integrated process)，あるいは確率的トレンド (stochastic trend) と呼ばれる）と想定されるから，差分により定常性に到達できる．非定常性は，差分というフィルターを通して事前に処理され，いわば闇の中に葬り去られる．これが，Box-Jenkins 流の考え方であり，モデル・フィッティングあるいはビルディングの立場である．

これに対して，現在の計量経済学における時系列分析では次のように考える．和分過程が示す非定常性あるいは確率的トレンドは，その系列が固有にもっている変動であり，多項式で示されるような決定論的，経済外的な変動ではない．また，トレンドが確率的か決定論的かどうかは自明のことではない．仮に，トレンドが確率的であるとしても，差分後の系列を考えるのは，変数間のレベルにおける潜在的，長期的な関係についての情報を捨てることになる．従っ

て，確率的トレンド自体も白日の下にさらして分析すべきであると．実際，経済学においては，変数のレベルに関する情報を取り込むべきであるという発想からSarganにより提案され，後に誤差修正(error correction)モデルと名付けられた時系列モデルが，再び脚光を浴びている．時系列が，トレンド部分と定常な誤差項から成り立つとすれば，トレンド部分に関心があるという意味で，現在の研究状況は従来の同時方程式モデルあるいは回帰モデルの世界へ逆行しているように見える．しかし，これは単なる逆行ではない．ある意味で和分過程の極限過程と考えられるブラウン運動の理論を武器として，それまで正則理論の世界から除外されていた非定常な変数を，内生あるいは外生変数としてモデルの中に取り込み，新たに非正則理論の場を作り上げたのである．実際，後述するように，このような非定常な変数が組み込まれると，通常の回帰理論や同時方程式理論はもはや成立しなくなる．

非定常性に対する研究は，AR (1) モデルにおける係数の単位根（unit root）検定という形で，70年代後半に始まった（Fuller [9], Dickey-Fuller [5]）．検定統計量が正規理論の枠内にないということ，そして，統計量の分布は，定数項や多項式トレンドからの乖離に対して考えた場合には異なるなどの理由で，いくつかの分布表が準備された．さらに，80年代にはもっと一般に，AR (p) あるいはARMA (q, q) モデルにおけるAR部分の単位根検定が盛んに行われた．これらの検定は，単位根があるという帰無仮説を，定常であるという対立仮説に対して検定するものである．実証研究においては，Nelson-Plosser [17]が，米国マクロ経済の年次データ（14系列）に対して，1つの系列（失業率）以外は5％の有意水準で単位根仮説を棄却できないという結果を得た．また，確率的トレンドの存在は，合理的期待仮説の成立と深く結びついており，金融市場を中心に多くの実証研究がある．概観についてはDickey-Bell-Miller [4]，山本 [33]，畠中 [14] を参照されたい．最近の理論的研究（Fukushige-Hatanaka-Koto [8], Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin [16]）では，帰無仮説と対立仮説を逆にして，上述の検定方式の検出力の低さを補強する議論が行われている．定常性を帰無仮説とすることは，単位根検定の論理からも支持される選択である．さらにBayes統計の立場から，これらの検定方式を批判する論文（Sims [27], Sims-Uhlig [29]）や擁護する論文（Phillips [19]）が現れた．

3.1.3 みせかけの回帰と共和分

和分過程に従う変数はエルゴード的でなく，通常の推測理論が適用不能となる事実は，すでにYule [34] が指摘したことであるが，半世紀を経てGranger-Newbold [12] がシミュレーションにより再確認し，さらに10年以上の経過の後に，Phillips [18] が理論的な分析を行った．すなわち，互いに独立な次数1の2つの和分過程においては，

(a) 相関係数は0には確率収束せずに，退化しない分布に弱収束する．

(b) 回帰における最小2乗推定量（LSE）や決定係数も0には確率収束せずに，退化しない分布に弱収束する．

(c) t 統計量は発散する．

(d) Durbin-Watson統計量は0に確率収束する．

正則な場合と異なり，互いに独立な変数間であっても，上述のようにあたかも有意に見える事実が成立する回帰関係を指して，みせかけの回帰（spurious regression）と言う．みせかけの回帰なのかどうかは，次に叙述する共和分の有無に関する検定を行う必要がある．

和分過程の系列間に，みせかけではなく真の回帰関係が成立する場合，共和分（cointegration)の関係があると言う．すなわち，複数の和分過程は個々には非定常であってもそれらの線形結合が定常になり得る，という事実はGranger [11] により発見された．今，q 次元和分過

程 $\{X_t\}$ が

$$(1)\qquad (1-L)^d X_t = u_t = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j},\quad X_t = 0\ (t = -(q-1), -(q-2), \ldots, 0)$$

に従うとする．但し，L はラグ•オペレータ，d は正整数，A_j は定数行列で $\sum_{j=0}^{\infty} j\|A_j\| < \infty$ をみたすもの（$\|A_j\|$ は $A_j'A_j$ の最大固有値の平方根），$\{\varepsilon_t\}$ は平均が 0 ベクトル，共分散行列が単位行列となるような独立，同一分布に従う確率過程である．このとき，$\{X_t\} \sim I(q\,;d)$ と書くことにする．

離散時間過程 $\{X_t\}$ に対して，$[0,1]$ 上の連続時間過程 $\{X_T(t)\}$ を，$X_T(0)=0$, $X_T(1)=X_T/T^{d-\frac{1}{2}}$,

$$(2)\qquad X_T(t) = X_{j-1}/T^{d-\frac{1}{2}},\quad \frac{j-1}{T} \le t < \frac{j}{T},\quad (j=1,\cdots,T)$$

で定義すれば，$\{X_T(t)\}$ が誘導する測度は，$T \to \infty$ のとき，$\{AF_{d-1}(t)\}$ が誘導する測度に弱収束する（Phillips-Durlauf [20], Chan-Wei [3], Sims-Stock-Watson [28]）．ここで，$A = \sum_{j=0}^{\infty} A_j$ であり，A の各行は 0 ベクトルでないとする．もしも 0 ベクトルになるような行があれば，MA 部分に単位根が存在することになり，和分の次数 d が下がることになる．また，$\{F_{d-1}(t)\}$ は

$$(3)\qquad F_g(t) = \int_0^t F_{g-1}(s)\,ds,\quad F_0(t) = w(t),\quad (g=1,\cdots,d-1)$$

により定義される q 次元確率過程であり，$\{w(t)\}$ は $[0,1]$ 上の q 次元標準ブラウン運動である．従って，$\{F_g(t)\}$ は g 一重積分ブラウン運動であるが，Riemann-Stieltjes 積分により

$$(4)\qquad F_g(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^g}{g!}\,dw(s)$$

とも表現できる（Tanaka [31]）．連続写像の定理（Billingsley [1]）から，2 次の標本モーメントに関しては，次の弱収束が成立する．

$$(5)\qquad L\left(\frac{1}{T^{2d}} \sum_{t=1}^{T} X_t X_t'\right) \longrightarrow L\left(A \int_0^1 F_{d-1}(t)(F_{d-1}(t))'\,dt A'\right).$$

共和分の存在は，行列 A が正則でないときに保障される．それは，（5）の表現から $\{X_t\}$ の系列間の確率的な多重共線性と見なすことができる．さらに，（1）の表現における定常な差分過程 $\{u_t\}$ の原点におけるスペクトラムが $AA'/(2\pi)$ であることから，共和分は，差分後の系列間の長期成分における一次従属性とも解釈できる．このとき，あるベクトル $\alpha(\neq 0)$ が存在して，$\{\alpha' X_t\}$ は次数が d より小さい一変量和分過程となる．すなわち，$\{\alpha' X_t\} \sim I(1\,;d-b)$, $b>0$ である．そして，$\alpha = (1, -\beta')'$ とし，さらに $X_t = (Y_t, Z_t')'$ と分割することにより，共和分モデル

$$(6)\qquad Y_t = Z_t'\beta + v_t$$

が得られる．このモデルは通常の回帰モデルと酷似しているが，以下の点で異なる．

（a）　被説明変数 Y_t と説明変数 Z_t は，それぞれ，$I(1\,;d)$, $I(q-1\,;d)$ に従う．

（b）　誤差項 v_t は $I(1\,;d-b)$, $b>0$ に従う．

（c） Z_t と v_t は，一般に，同時点だけでなく，異時点間でも相関をもつ．

共和分モデル（6）における β の推定量としては，LSE，2段階 LSE (2SLSE)，最尤推定量 (MLE) などが考えられる．いずれの推定量も，説明変数 Z_t と誤差項 v_t の間に相関があるにもかかわらず，一致性をもつことが示される．但し，漸近分布は異なる．非常に単純な場合，例えば，$(1-L)^d Z_t=\eta_t$ として，$(v_t, \eta_t')'$ が互いに独立に $N(0, \Sigma), (\Sigma>0)$，に従う場合には次の結果が得られる．ここで，正規性の仮定は MLE を定義するために必要なだけで，漸近理論を議論する際には不要である．

（i） LSE $\hat{\beta}=(Z'Z)^{-1}Z'Y$.

（7） $$L(T^d(\hat{\beta}-\beta)) \longrightarrow L(U^{-1}(V_1+V_2+\delta_{d1}\Sigma_{21})),$$

但し，

$$U=\Sigma_{22}^{1/2}\int_0^1 F_{2,d-1}(t)(F_{2,d-1}(t))'dt\,\Sigma_{22}^{1/2},$$
$$V_1=\Sigma_{22}^{1/2}\int_0^1 F_{2,d-1}(t)dw_1(t)(\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})^{1/2},$$
$$V_2=\Sigma_{22}^{1/2}\int_0^1 F_{2,d-1}(t)(dw_2(t))'\Sigma_{22}^{-1/2}\Sigma_{21},$$

$$\delta_{d1}=\begin{cases}1 & (d=1),\\ 0 & (d\geq 2),\end{cases}$$

であり，$F_{2,d-1}(t)$ は $F_{d-1}(t)$ の最後の $q-1$ 成分からなるベクトル，$w_1(t)$ は $w(t)$ の第1成分，$w_2(t)$ は $w(t)$ の残りの $q-1$ 成分からなるベクトルである．

（ii） 2SLSE $b=(Z'PZ)^{-1}Z'PY$.

（8） $$L(T^d(b-\beta)) \longrightarrow L(U^{-1}(V_1+V_2)),$$

但し，

$$P=Z_{-1}(Z'_{-1}Z_{-1})^{-1}Z'_{-1}, \quad Z_{-1}=(Z_0, Z_1,\cdots, Z_{T-1})'.$$

(iii) MLE $\tilde{\beta}=(Z'MZ)^{-1}Z'MY$.

（9） $$L(T^d(\tilde{\beta}-\beta)) \longrightarrow L(U^{-1}V_1),$$

但し，

$$M=I_T-\tilde{Z}(\tilde{Z}'\tilde{Z})^{-1}\tilde{Z}',$$
$$\tilde{Z}=((1-L)^d Z_1,\cdots,(1-L)^d Z_T)'.$$

極限分布の表現（7），（8），（9）より，次のことが言える．LSE と 2SLSE は，$d\geq 2$ の場合には同一の極限分布を与える．従って，2SLSE は LSE の改善とはならない．例外は，$d=1$ の場合であるが，いずれにしろ，2SLSE も高次の意味でのバイアスを除去することはできない．他方，MLE の極限分布の平均は0ベクトルであり，高次のバイアスを除去している．さらに，MLE は十分大きな推定量のクラスの中で最大集中確率をもつことが示される (Saikkonen [24])．また，MLE の極限分布は条件つき正規であるが，LSE や 2SLSE は単位根分布を含むためにそのような性質をもたない．但し，$\Sigma_{21}=0$ の場合，すなわち，Z_t が純粋に外生的な場合

には，これら3つの推定量の極限分布は一致する．

共和分に関する研究は，経済時系列の分野において現在最もホットなトピックであり，和分次数dが1の場合については，理論面のみならず，多くの実証研究も行われている．Engle-Granger [7] の編著は，そのための優れた必読文献である．共和分ベクトルの推定・検定問題についてはEngle-Granger [6], Stock [30], Johansen [15], Phillips-Ouliaris [22], Phillips-Hansen [21], Saikkonen [24] を参照されたい．推定については，共和分ベクトルの推定方式として，より効率的で，しかも（1）の差分過程u_tあるいは（6）の誤差項v_tのパラメータに依存しないようなものを考えることが重要である．また，上述の諸論文で提案されている検定は，共和分の非存在あるいは共和分ベクトル空間の小さく設定された次元（特殊な場合として，みせかけの回帰関係）を帰無仮説として，共和分の存在あるいは共和分ベクトル空間の大きく設定された次元に対して検定するものである．論理的には，共和分の存在を帰無仮説とするのが望ましく，その観点からの研究として，Hansen [13], Quintos-Phillips [23], Tanaka [32]がある．対象とする和分過程の系列数qが大きくなると，共和分ベクトル空間の次元を決定する問題も重要となってくる．さらに，すべての系列が必ずしも同一の和分次数dをもつとは限らないので，次数決定の方法も研究対象となる．そして，(6)の共和分モデルを，変数がさまざまの和分次数をもつような同時方程式モデルに拡張することになろう．

共和分現象は，回帰モデルあるいは同時方程式モデルの従来からの理論を再考させるに足るほどのインパクトを与えるものであり，単に経済学における時系列分析の問題としてだけでなく，広く時系列分析の研究に携わる人々が解明するに値する重要な問題としてあり続けると思われる．

参考文献

[1] Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures*, John Wiley.

[2] Box, G. E. P. and G. M. Jenkins (1970). *Time Series Analysis : Forecasting and Control*, Holden-Day.

[3] Chan, N. H. and C. Z. Wei (1988). Limiting Distributions of Least Squares Estimates of Unstable Autoregressive Processes, *Annals of Statistics*, **16**, 367-401.

[4] Dickey, D. A., Bell, W. R. and R. B. Miller (1986). Unit Roots in Time Series Models: Tests and Implications, *The American Statistician*, **40**, 12-26.

[5] Dickey, D. A. and W. A. Fuller (1979). Distribution of Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root, *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 427-431.

[6] Engle, R. E. and C. W. J. Granger (1987). Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing, *Econometrica*, **55**, 251-276.

[7] Engle, R. E. and C. W. J. Granger (1991). *Long-Run Economic Relationships*, Oxford University Press.

[8] Fukushige, M., Hatanaka, M. and Y. Koto (1990). Testing for the Stationarity and the Stability of Equilibrium, Paper presented at 6th World Congress of Econometric Society.

[9] Fuller, W. A. (1976). *Introduction to Statistical Time Series*, John Wiley.

[10] Granger, C. W. J. (1969). Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods, *Econometrica*, **37**, 161-194.

[11] Granger, C. W. J. (1981). Some Properties of Time Series Data and Their Use in Econometric Model Specification, *Journal of Econometrics*, **16**, 121-130.

[12] Granger, C. W. J. and P. Newbold (1974). Spurious Regressions in Econometrics, *Journal of Econometrics*, **2**, 111-120.

[13] Hansen, B. E. (1992). Tests for Parameter Instability in Regressions with I (1) Processes, To appear in *Journal of Business and Economic Statistics*.

[14] 畠中道雄 (1991).「計量経済学の方法」創文社

[15] Johansen, S. (1988). Statistical Analysis of Cointegration Vectors, *Journal of Economic Dynamics*

and Control, **12**, 231-254.

[16] Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P. and Y. Shin (1992). Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root: How Sure Are We That Economic Time Series Have a Unit Root ? Forthcoming in *Journal of Econometrics*.

[17] Nelson, C. R. and C. I. Plosser (1982). Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implications, *Journal of Monetary Economics*, **10**, 139-162.

[18] Phillips, P. C. B. (1986). Understanding Spurious Regressions in Econometrics, *Journal of Econometrics*, **33**, 311-340.

[19] Phillips, P. C. B. (1991). To Criticize the Critics: An Objective Bayesian Analysis of Stochastic Trends, To appear in Journal of Applied Econometrics.

[20] Phillips, P. C. B. and S. N. Durlauf (1986). Multiple Time Series Regression with Integrated Processes, *Review of Economic Studies*, **53**, 473-495.

[21] Phillips, P. C. B. and B. E. Hansen (1990). Statistical Inference in Instrumental Variables Regression with I (1) Processes, *Review of Economic Studies*, **57**, 99-125.

[22] Phillips, P. C. B. and S. Ouliaris (1990). Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration, *Econometrica*, **58**, 165-193.

[23] Quintos, C. E. and P. C. B. Phillips (1992). Parameter Constancy in Cointegrating Regressions, Mimeo, Yale University.

[24] Saikkonen, P. (1991). Asymptotically Efficient Estimation of Cointegrating Regressions, *Econometric Theory,* **7**, 1-21.

[25] Sims, C. A. (1972). Money, Income, and Causality, *American Economic Review,* **62**, 540-552.

[26] Sims, C. A. (1980). Macroeconomics and Reality, *Econometrica*, **48**, 1-48.

[27] Sims, C. A. (1988). Bayesian Skepticism on Unit Root Econometrics, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **12**, 463-474.

[28] Sims, C. A., Stock, J. H. and M. W. Watson (1990). Inference in Linear Time Series Models with Some Unit Roots, *Econometrica*, **58**, 113-144.

[29] Sims, C. A. and H. Uhlig (1991). Understanding Unit Rooters: A Helicopter Tour, *Econometrica*, **59**, 1591-1599.

[30] Stock, J. H. (1987). Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Cointegrating Vectors, *Econometrica*, **55**, 1035-1056.

[31] Tanaka, K. (1992). Statistical Analysis of Higher Order Integrated and Cointegrated Processes, Mimeo, Hitotsubashi University.

[32] Tanaka, K. (1993). An Alternative Appcoach to the Asymptotic Theory of Spurious Regression, Cointegration and Near Cointegration, *Econometric Theory*. **9**, 36-61.

[33] 山本　拓 (1988). 「経済の時系列分析」創文社

[34] Yule, G. U. (1926). Why Do We Sometimes Get Nonsense-Correlations between Time-Series ?, *Journal of the Royal Statistical Society,* **89**, 1-64.

3.2 工学における時系列分析

酒 井 英 昭

3.2.1 まえがき

時系列解析と最も関連の深い工学の分野は制御工学におけるシステム同定 (system identification) とディジタル信号処理 (digital signal processing) におけるスペクトル推定，適応フィルタリング (adaptive filtering) であろう．

システム同定とは制御の対象となるプラントの動特性を入出力データから推定することを言う．1950～60 年代ではクロススペクトル解析に基づくノンパラメトリックな推定法が中心となっていたが，1970 年代以降になるとプラントの伝達関数を遅延作用素Bの有理式で表現し，そ

の係数を推定するパラメトリックな方法が主になってきており，推定法も逐次最小2乗(recursive least squares, RLS) 法，補助変数 (instrumental variable) 法，バイアス補償最小2乗法などのデータに関しくり返し的な方法が考案されてきている (Ljung [11]，中溝 [16])．
スペクトル推定の分野では1967年にBurgが最大エントロピー法 (maximum entropy method, MEM) を発表して以来，線形予測を用いた高解像度 (high resolution) スペクトル解析が話題の中心となってきた．ピリオドグラムに基づく古典的方法ではデータ点数をNとすると周波数の差が$1/N$以下の2つの正弦波を“解像”(周波数を2つのものとして識別)することはできないが，MEMではそれが可能であるということで注目され多くの研究がなされた．そして，この分野での重要な論文を再録した2冊の本 (Childers [2], Kesler [9]) がIEEE (米国電気電子学会) から出版されている (YuleとWalkerのARモデルに関する論文などの古典的論文の含まれていて便利である)．これらの本の巻末にはスペクトル推定関連の詳細な文献リストも付加されている．また，最近，ウプサラ大学地震学科から1964年から1989年までの抄録を伴った1483件の論文リスト集が発行されている (Båth [1])．さらに，別の文献リストも発表されている (Stoica [22])．

適応フィルタリングの手法は電気通信におけるエコーキャンセリング，適応等化，適応アンテナアレイなどで広く用いられている．ここでは，通信路の特性を同定する際に，音声帯域で数KHzのサンプリング周波数(1秒間に数千個のデータ点数)が必要で，計算量の点から通常のシステム同定の手法は適用できず，確率近似法に似たLMS法が広く使われている．しかし，この方法でのパラメータの収束は遅く，収束の速いRLS法の計算量を減らす研究が1980年代に盛んに行われた．また，語長の短いプロセッサで計算しても精度があまり劣化しないアルゴリズムの研究も行われた．

このように統計学での時系列解析とは違った視点からいろいろな展開が上記の工学の分野でなされている．以下では各テーマに関しこれらの展開を述べることにする．

3.2.2 スペクトル推定

MEMはARモデルあてはめと同じであることはよく知られているが，統計学の分野であまり知られていないBurgのもう一つの貢献はBurgアルゴリズムとして知られるARパラメータの推定法を考察したことである．このアルゴリズムは次の基準

$$Q'=\sum_{t=p+1}^{N}\left\{\left(\sum_{k=0}^{p}\phi_k X_{t-k}\right)^2+\left(\sum_{k=0}^{p}\phi_k X_{t-p+k}\right)^2\right\}$$

に基づく．ここで，第一項は通常の前向き予測誤差の2乗和だが，第二項は後向き予測誤差の2乗和で，このQ'をARモデルの偏自己相関係数(音響学における反射係数)に関して近似的に最小化することにより，安定なARモデルを得ることができる．通常の第一項だけの最小2乗法ではNが十分大きくないと安定なモデルが得られる保障はない．これは音声合成への応用で得られたARモデルにより合成音声を発生する際にとくに必要な性質である．Yule-Walker推定によっても安定なモデルを得ることができるが，データ点外で$X_t=0$と仮定することになり，Nが数十のオーダのときはバイアスが生じる．

後向き予測誤差も最小化の基準に含めるというBurgのアイデアにより少数のデータ点数でもバイアスのない安定なモデルが得られるようになった (川嶋，酒井 [8])．以下にアルゴリズムの概要をまとめておく．いま，p次の前向き予測誤差，後向き予測誤差を

$$\varepsilon_p(t)=\sum_{k=0}^{p}\phi_{p,k}X_{t-k},\quad \eta_p(t)=\sum_{k=0}^{p}\phi_{p,k}X_{t-p+k}$$

とおく．ここで，$\phi_{p,0}=1$ で，$\phi_{p,k}(k=1,\cdots,p)$ は p 次の予測係数である．よく知られた Levinson-Durbin の公式 $\phi_{p+1,i}=\phi_{p,i}+\phi_{p+1,p+1}\phi_{p,p+1-i},(i=1,\cdots,p)$ により

$$\varepsilon_{p+1}(t)=\varepsilon_p(t)+\phi_{p+1,p+1}\eta_p(t-1),\ \eta_{p+1}(t)=\eta_p(t-1)+\phi_{p+1,p+1}\varepsilon_p(t)$$

なる関係が得られる．これらを上記の Q' に代入し，反射係数 $\phi_{p,p}$ に関し最小化すれば

$$\hat{\phi}_{p,p}=\frac{-2}{D_{p-1}}\sum_{t=p+1}^{N}\hat{\varepsilon}_{p-1}(t)\hat{\varepsilon}_{p-1}(t-1),\ D_{p-1}=\sum_{t=p+1}^{N}\{\hat{\varepsilon}_{p-1}^2(t-1)\}$$

により推定値 $\hat{\phi}_{p,p}$ が得られる．$\hat{\varepsilon}_k(t)$, $\hat{\eta}_k(t)$ は $\hat{\varepsilon}_k(t)=\hat{\varepsilon}_{k-1}(t)+\hat{\phi}_{k,k}\hat{\eta}_{k-1}(t-1)$, $\hat{\eta}_k(t)=\hat{\eta}_{k-1}(t-1)+\hat{\phi}_{k,k}\hat{\varepsilon}_k(t)(t=k+1,\cdots,N\,;\,k=1,\cdots,p-1)$ により再帰的に計算する．ただし，$\hat{\varepsilon}_0(t)=\hat{\eta}_0(t)=X_t$ が初期値となる．D_{p-1} は $D_{p-1}=(1-\hat{\phi}_{p-1,p-1}^2)D_{p-2}-\hat{\varepsilon}_{p-1}^2(p)-\hat{\eta}_{p-1}^2(N)$ により逐次的に計算できる．必ず $|\hat{\phi}_{k,k}|<1$ なので $\hat{\phi}_{k,k}$ から計算される AR モデルは安定である．このアルゴリズムでは $3Np+p^2$ の計算量を必要とし $Np+p^2$ の Yule-Walker 推定の約 3 倍である．

Burg アルゴリズムはデータ $\{X_t\}$ が（正弦波の和）＋（白色雑音）と表現される場合に，これらの周波数を推定するのによく用いられる．これは，短いデータ点数のデータからその信号の周波数を決定する問題が通信工学のいろいろな分野（レーダー，ソナーでのドップラー処理，アンテナアレーによる方位角の推定）で生じるためである．周波数は AR スペクトルの推定値 $\hat{f}_p(\lambda)=\hat{\sigma}_p^2/|\sum_{k=0}^{p}\hat{\phi}_{p,k}e^{i2\pi\lambda k}|^2$ の極大点を求めることにより得られる．データ点数Nが小さい場合，この方法による推定値は通常のピリオドグラム $I_N(\lambda)=|\sum_{t=1}^{N}X_te^{i2\pi\lambda t}|^2/N$ による方法に比べ，良好な結果を与える．しかし，Burg アルゴリズムには正弦波の位相に周波数推定値が強く依存するとか，1 つの正弦波なのにスペクトルにピークが 2 つ現われるいわゆるラインスプリッテング (line splitting) 現象が生じるとかの欠点があることが知られている．これらに対する対策としては，上記の基準 Q' を $\phi_1,\cdots,\phi_p$ に関し正確に最小化する FBLP (forward backward linear prediction) 法（Marple [13]）や Q' の和を重み $w_p(t)$ のついた和でおきかえるテイパーつき（tapered）Burg 法（Kaveh and Lippert [7]）が提案されている．前者ではモデルの安定性は保障されないが，後者では保障され，単一正弦波の場合は周波数推定値の分散を最小にする最適なテイパーが

$$w_p(t)=6(t-p)(N-t+1)/(N-p)(N-p+1)(N-p+2)$$

で与えられるが示されている．これは t に関して 2 次で，通常の Hamming, Hanning, Blackman 窓とは違った形となっている．

また，解像度を上げる方法としてデータの間引き（decimation）を用いる線形予測法が提案されている (Quirk and Liu [18])．一般に，2 つの周波数が接近している程これらを解像するのは困難になる．データ X_t が $X_t=A_1e^{i2\pi f_1t}+A_2e^{i2\pi f_2t}+v_t$ (v_t：雑音) と書けるとし，間引きされたサンプルを $Y_t=X_{tM}$ と書く．つまり，X_t からM個ごとにサンプルをとって新しい系列 Y_t を作る．すると，この Y_t では周波数の差は X_t での差のM倍となり，解像がより容易になるというわけである．実際にはエリアジング（aliasing）を防ぐために間引きの前に f_1, f_2 を含む帯域幅 $1/M$ の帯域通過 (bandpass) フィルタリングを X_t に施さなければならない．間引きと補間（interpolation）によるマルチレート（multirate）信号処理が近年盛んに研究されているが，これはその一例である．

ところで，ARスペクトルによる周波数推定法の統計的性質の研究は当初はシミュレーションなどにより調べられたが，Sakai [19] はピリオドグラムを用いた解析と数値計算により単一正弦波の場合，周波数の推定誤差分散が漸近的にはデータ点数Nと信号と雑音のSN比（$\rho=A^2/2\sigma^2$）の2乗の積に反比例することを示した．ここで，Aは正弦波の振幅，σ^2は白色雑音の分散である．しかし，次数pに関してはpが大きくなると分散も減少するという数値計算結果を示したのみだったが，最近になり統計学の分野でこれに関する研究が進展し，AICを用いて次数を選択するとその平均次数は$\bar{p}$は$\sqrt{N}$のオーダーであり，周波数推定誤差分散は$(\bar{p}^3N)^{-1}$のオーダーであることが明かにされている（Mackisack and Poskitt [12]）．つまり分散はp^3に反比例する．次数pのARモデルあてはめが一致性をもつには$p^2/N\to 0$が条件とされるので，結局，ARモデルあてはめによる周波数推定値の分散はほぼ$N^{-2.5}$のオーダーと結論される．ピリオドグラムの最大点を求める方法（雑音が正規性のときは最尤推定）の分散はN^{-3}のオーダーなので，ARモデルによるものが劣っているようにみえる．しかし，後者はρNが十分大きくないとN^{-3}のオーダーにならないこともわかっており，現実の信号は完全な正弦波でなくスペクトルに幅があるなどの点を考慮すると前者が依然として有用な方法であることに変わりはない．なお，複数個の複素正弦波の場合の解析に関してはGu [5] が次のような結果を得ている．2個の場合では，周波数f_1, f_2でのSN比をρ_1, ρ_2とするとf_1とf_2が十分離れているとき$(|f_1-f_2|>1/p)$, f_iの推定値の分散は$(2\pi^2Np^3\rho_i^2)^{-1}$になり，$f_1$と$f_2$が接近しているときは$(Np^2\rho_i)^{-1}$となる．つまり，接近した周波数の推定にはより大きな誤差分散が伴うことがわかる．

他の高解像度周波数推定法としてはPisarenko法がある．この方法では予測係数ベクトル$\boldsymbol{b}=(b_0\ b_1\ \cdots\ b_p)^T$を

$$\boldsymbol{Q}_p(N)=\min\frac{1}{N-p}\sum_{t=p+1}^{N}\left|\sum_{k=0}^{p}b_kX_{t-k}\right|^2$$

を$\|\boldsymbol{b}\|_2^2=1$の制約の下で求め$b(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_pz^p=0$の解の偏角を周波数推定値とする．上記の最小化問題は$Q_p(N)=\boldsymbol{b}^HR_p(N)\boldsymbol{b}$と二次形式で表現すると$R_p(N)$の最小固有値と対応する固有ベクトルを求めることである．もし，Yule-Walker推定と同じく$Q_p(N)$での和を$t=1$から始め$X_t=0(t\leq 0)$とすると$R_p(N)$はToeplitz行列となり，多項式$b(z)$の根は必ず単位円上にある．X_tがL個の（複素）正弦波と白色雑音の和のとき，L個の信号に対応する固有値と$p-L$個の雑音に対応する大きさがほぼ同じ固有値に分かれる．したがって，正弦波の個数Lを推定するには，最小固有値の重複度の検定が必要となり，いくつかの方法が提案されている．一つは情報量基準的な方法で$Q_p(N)+pC_N$を最小にする次数$\hat{p}$をLの推定値とする．$C_N\to 0$, $C_N\sqrt{N}/\sqrt{\log\log N}\to\infty(N\to\infty)$と$C_N$を選ぶと$\hat{p}$は$L$の一致推定となることが示されている（Zhao, Krishnaiah, and Bai [23]）．また，仮説検定に基づく方法（Fuchs [3]）も提案されている．

一方，X_tのモデルとして（実）正弦波の周波数を$f_i=i/N(i=0,1,\cdots,N/2)$の形に制限する古典的調和分析の場合，すなわち

$$X_t=\sum_{i=0}^{N/2}v_i(A_i\cos 2\pi f_it+B_i\sin 2\pi f_it)+n_t$$

と書ける場合を考える．ここで，$v_i=1$なら対応する周波数成分が存在し，0ならないとし，n_tは平均0，分散σ^2の正規性白色雑音とする．情報量基準的方法により$v_i=1$となるiの個数Lを推定するとその基準は

$$\log \hat{\sigma}_p^2 + \frac{2(\log N + c)}{N} p$$

となる．ここで，$J_i = 2I_N(f_i)/N(I_N(f)$：ピリオドグラム$)$を大きい順に並べかえ $J_{(1)} \geq J_{(2)} \geq \cdots \geq J_{(N/2)}$ とおくと，σ^2 の推定値は $\hat{\sigma}_p^2 = \sum_{t=1}^{N} X_t^2/N - J_{(1)} - J_{(2)} - \cdots - J_{(p)}$ と書ける．また，c は適当な定数であり，これを調節することにより L を正しく推定する確率を設定できる．上記の基準は BIC と同じであり，この問題に対する古典的 Fisher 検定と密接な関連がある（Quinn [17], Sakai [20]）．

3.2.3 QR 分解による適応フィルタ

近年適応フィルタの分野で QR 分解に基づく数値的に安定なアルゴリズムの開発が盛んに行われている．本節ではこれを簡単に紹介する．いま，p 個の入力信号 $x_1(x), \cdots, x_p(t)$ の線形結合で目標出力信号 $y(t)$ に近い信号を作るとする．RLS 法では各時点 n で次の基準

$$J(n) = \sum_{t=1}^{n} \lambda^{n-t} \varepsilon^2(n, t), \ \varepsilon(n, t) = y(t) - \sum_{i=1}^{p} c_i(n) x_i(t)$$

を最小とする回帰(重み)係数ベクトル $\boldsymbol{c}(n) = (c_1(n) \cdots c_p(n))^T$ が再帰的に決定される．ここで，$\lambda\,(0 < \lambda \leq 1)$ は忘却係数と呼ばれる量で，系のゆるやかな変動に対応するために導入された．$y(t)$ を $x_{p+1}(t)$ と書き，$n \times 1$ のデータベクトルを $\boldsymbol{x}_i(n) = (x_i(1) x_i(2) \cdots x_i(n))^T (i = 1, \cdots, p+1)$ をおく．また，$n \times (p+1)$ の重みつきデータ行列を $\boldsymbol{X}(n) = \boldsymbol{B}(n)(\boldsymbol{x}_1(n) \cdots \boldsymbol{x}_p(n) \boldsymbol{x}_{p+1}(n))$ と，$n \times p$ のデータ行列を $\tilde{\boldsymbol{X}}(n) = \boldsymbol{B}(n)(\boldsymbol{x}_1(n) \cdots \boldsymbol{x}_p(n))$ とおく．ただし，$n \times n$ の重み行列を $\boldsymbol{B}(n) = \mathrm{diag}(\beta^{n-1}, \cdots, \beta, 1)\ (\beta = \sqrt{\lambda})$ とする．いま，$\boldsymbol{X}(n)$ の QR 分解を

$$\boldsymbol{Q}(n) \boldsymbol{X}(n) = (\boldsymbol{R}^T(n) \boldsymbol{O})^T$$

と書く．ここで，$\boldsymbol{Q}(n)$ は $n \times n$ の直交行列，$\boldsymbol{R}(n)$ は $(p+1) \times (p+1)$ の上三角行列である．

$$\boldsymbol{R}(n) = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{R}}(n) & \tilde{\boldsymbol{r}}(n) \\ \boldsymbol{O} & \rho(n) \end{pmatrix}$$

$(\rho(n)$：スカラー$)$ と分割すれば，$J(n) = \|\boldsymbol{X}(n)(-\boldsymbol{c}^T(n)\ 1)^T\|^2 = \|\boldsymbol{Q}(n)\boldsymbol{X}(n)(-\boldsymbol{c}^T(n)\ 1)^T\|^2$ を最小にする $\boldsymbol{c}(n)$ は $\tilde{\boldsymbol{R}}(n)\boldsymbol{c}(n) = \tilde{\boldsymbol{r}}(n)$ により求まる．一方，通常の正規方程式は $\boldsymbol{S}(n)\boldsymbol{c}(n) = \boldsymbol{s}(n)$ と書ける．ただし，$\boldsymbol{S}(n) = \tilde{\boldsymbol{X}}^T(n)\tilde{\boldsymbol{X}}(n) = \tilde{\boldsymbol{R}}^T(n)\tilde{\boldsymbol{R}}(n)$, $\boldsymbol{s}(n) = \tilde{\boldsymbol{X}}^T(n)\boldsymbol{B}(n)\boldsymbol{x}_{p+1}(n)$ である．$\tilde{\boldsymbol{R}}(n)$ の条件数は $\boldsymbol{S}(n)$ のそれの平方根であり，QR 分解法では同じ精度の計算を約半分の語長で実行できる．再帰的な計算法としてはシストリックアレイ（systolic array）によるものが注目されている．この方法ではプロセッサを格子状に配置し，並列処理とパイプライン処理により計算を効率的に行う．データ行列の構造は $\boldsymbol{X}(n) = (\beta \boldsymbol{X}^T(n-1)\ \boldsymbol{\phi}(n))^T$ となっている．ただし，$\boldsymbol{\phi}(n) = (x_1(n) \cdots x_{p+1}(n))^T$ とおく．したがって，$\mathrm{diag}(\boldsymbol{Q}(n-1), 1)\boldsymbol{X}(n) = (\beta \boldsymbol{R}^T(n-1)\ \boldsymbol{O}\ \boldsymbol{\phi}(n))^T$ となるので

$$\hat{\boldsymbol{Q}}(n)(\beta \boldsymbol{R}^T(n-1)\ \boldsymbol{\phi}(n))^T = (\boldsymbol{R}^T(n)\ \boldsymbol{O})^T$$

となる $(p+1) \times (p+1)$ の直交行列 $\hat{\boldsymbol{Q}}(n)$ を求めればよい．$\beta \boldsymbol{R}(n-1)$ は上三角行列なので第 $(p+1)$ 行の $\boldsymbol{\phi}^T(n)$ を消去するには $(p+1)$ 回の Givens 回転を施せばよく，$\tilde{\boldsymbol{R}}(n)$ と残差 $\varepsilon(n, n)$ は上三角形のシストリックアレイにより計算できることが知られている（詳しくは酒井 [21] を参照）．

また，$I_p=(\beta R^T(n-1)\ \psi(n))\hat{Q}^T(n)\hat{Q}(n)(\beta^{-1}R^{-1}(n-1)\ O)^T=(R^T(n)O)\hat{Q}(n)(\beta^{-1}R^{-1}(n-1)\ O)^T$ の関係から上記の $\hat{Q}(n)$ により

$$\hat{Q}(n)(\beta^{-1}R^{-1}(n-1)\ O)=(R^{-1}(n)\ *)^T$$

と書ける．一方，

$$R^{-1}(n)=\begin{pmatrix} R^{-1}(n) & -c(n)\rho^{-1}(n) \\ O & \rho^{-1}(n) \end{pmatrix}$$

なので，$c(n)$ の計算は $R^{-T}(n)$ を計算する下三角形のアレイを上記の上三角形のアレイに横に接続して実行できる（McWhirter [14]）．

3.2.4 システム同定の新しい展開

近年，制御工学におけるロバスト制御の研究の発展に伴い，システム同定の分野でもロバスト性に関連した新しい展開が始まっている．ここで，ロバスト性とは統計学での意味とは少し違い，制御対象（プラント）の同定の際にその基準（公称系）モデルと同定誤差の限界を同時に与え，モデル誤差に強い制御系を設計するのに用いられる概念である．従来の統計的アプローチではプラントの伝達関数 $H(B)$ が適当なパラメトリックモデル $H(B,\theta)$ により N 点の入出力データ $\{u(t), y(t); t=1,\cdots,N\}$ から予測誤差法などにより $H(B,\hat{\theta})$ として推定される．ここで，$y(t)=H(B)u(t)+v(t)$ とする．このとき，周波数応答の同定誤差は $H(e^{i\lambda})-E[H(e^{i\lambda},\hat{\theta})]$ と $E[H(e^{i\lambda},\hat{\theta})]-H(e^{i\lambda},\hat{\theta})$ の和である．第一項はバイアス誤差で，この評価は一般には困難である．第二項の分散は近似的に $pf_v(\lambda)/Nf_u(\lambda)$ であることが知られている（Ljung [11]）．ただし，p はパラメータ数，$f_u(\lambda)$ は入力 $u(t)$ のスペクトル密度，$f_v(\lambda)$ は観測雑音 $v(t)$ のスペクトル密度である．バイアス誤差が無視できるとしても，同定誤差 $|H(e^{i\lambda})-H(e^{i\lambda},\hat{\theta})|$ の上界は確率的に与えられ，soft bound と呼ばれる．もっとも，これは特定の λ における信頼限界であって，すべての λ で同時に成り立つ同時信頼限界ではない点はあまり注意されていない．これに対し，同定誤差の上界をバイアス誤差も含め厳密に hard bound として評価しようという試みがいくつか発表されている（Kosut, Goodwin, and Polis [10]）．これらの中には誤差のある周波数応答データに窓関数をかけ，周波数応答関数を推定するという古典的方法への回帰も見られ興味深い．

3.2.5 あとがき

以上，時系列解析の工学分野での近年の展開について述べた．このほかにも触れられなかったいろいろな話題がある．たとえば，高次統計量に関する話題（井上「6]）や周期定常（cyclostationary）信号の信号処理に関するもの（Gardner [4]）やウェーブレットに基づくスペクトル解析（Moulin [15]）などがある．

参考文献

[1] Båth, M (1992). *Modern Spectral Analysis with Geophysical Applications Selected, Annotated Bibliograhy* 1964-1989, Report No. 2-92, Seismological Dept., Uppsala.

[2] Childers, D. B (Ed.) (1986). *Modern Spectrum Analysis*, IEEE Press.

[3] Fuchs, J. J. (1988). Estimating the number of sinusoids in additive white noise, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, **ASSP-36**, 1846-1853.

[4] Gardner, W. A, (Ed.) (1993). *Proc. Workshop on Cyclostationary Signals*, to be published, IEEE Press.

[5] Gu, H. (1993). Frequency resolution and estimation of AR spectral analysis, *IEEE Trans. Signal Process.*, **41**, 432-436.
[6] 井上雄二郎 (1992). 高次統計量キュムラントによる信号処理—I，II，システム／制御／情報，**36**, 90-99, 294-306.
[7] Kaveh, M. and Lippert, G. A. (1983). An optimum tapered Burg algorithm for linear prediction and spectral analysis, *IEEE Trans, Acoust., Speech, Signal Process.*, **ASSP-31**, 438-444.
[8] 川嶋弘尚，酒井英昭 (1989). 現代スペクトル解析，森北出版.
[9] Kesler, S. B (Ed.) (1986). *Modern Spectrum Analysis*, **II**, IEEE Press.
[10] Kosut, R. L., Goodwin, G. C. and Polis, M. P. (Ed.) (1992). Special Issue on System Identification for Robust Control Design, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **37**, 899-1008.
[11] Ljung, L. (1987). System Identification: *Theory for the User*, Prentice Hall.
[12] Mackisack, M. S. and Poskitt, D. S. (1989). Autoregressive frequency estimation, *Biometrika*, **76**, 565-575.
[13] Marple, L. (1980). A new autoregressive spectrum analysis algorithm, *IEEE Trans, Acoust., Speech, Signal Process.*, **ASSP-28**, 441-454.
[14] McWhirter, J. G. (1992). Algorithmic engineering in adaptive signal processing, *IEE Proc.-F*, **139**, 226-232.
[15] Moulin, P. (1992). Wavelets as a regularization technique for spectral density estimation, *Proc. IEEE-SP Int. Symp. Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, 73-76.
[16] 中溝高好 (1988). 信号解析とシステム同定，コロナ社.
[17] Quinn, B. G. (1989). Estimating the number of terms in a sinusoidal regression, *J. Time Series Anal.*, **10**, 71-75.
[18] Quirk, M. P. and Liu, B. (1983). Improving resolution for autoregressive spectral estimation by decimation, *IEEE Trans Acoust., Speech, Signal Process.*, **ASSP-31**, 630-637.
[19] Sakai, H. (1979). Statistical properties of AR spectral analysis, *IEEE Trans, Acoust., Speech, Signal Process.*, **ASSP-27**, 402-409.
[20] Sakai, H. (1990). An application of a BIC-type method to harmonic analysis and a new criterion for order detemination of an AR process, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, **38**, 999-1004.
[21] 酒井英昭 (1992). 最近の適応アルゴリズムの動向—RLS 法を中心として，音響誌，**48**, 493-500.
[22] Stoica, P. (1993). List of references on spectral line analysis, *Signal Process*, **31**, 329-340.
[23] Zhao, L. C., Krishnaiah, P. R. and Bai, Z. D. (1986). On detection of the number of signals in presence of white noise, *J. Multivariate Anal.*, **20**, 1-25.

3.3 海洋関係分野における時系列分析

川 島 利兵衛

実海域における波，風，船や海洋構造物の応答，海洋生物の時間，空間分布，回遊等に関して，観測データの解析には時系列分析が用いられている．

3.3.1 海洋波中の船体動揺応答と制御

B. L. Hutchison [1] は，古典的波浪理論，古典的船体運動論に確率過程論が導入され，現代波浪理論および現代船体運動論が形成され，M. St. Denis, J. Pierson の統計モデル [2] となった．としている．わが国ではこの分野に，山内 [18] による実海域における船体運動計測データの時列系分析がある．

海洋波中の船体動揺応答と制御に関して，1953-1969 年の国内外の研究成果を基に，山内 [19]，福田 [16] は，海洋波や不規則波中船体運動，波荷重に関する時系列分析法として，波と船体運動等の観測データから，スペクトル，クロススペクトルによる応答解析および船体応答の極大値予測，多方向波中の応答，および多入力スペクトル解析についてレビューしている．

M. K. Ochi ら [4] は耐航性研究の視点から予測のための統計学を系統的に論じている．山内，大津ら [20] はモデル化によるスペクトラム，力学系動特性を MAICE 法によって求める方法を論じ，Ohtsu ら [5] は実海域における船の運動と主機関の制御に，多変量自己回帰モデルの同定に対する基礎理論に基き，種々のオートパイロット系，主機関制御系のシステム設計に自己回帰モデルを導入した．運航時の主機関の制御について，石塚 [1] はプロペラ回転数およびトルクの変動を制御する離散型の舶用機関ガバナを，最小 AIC 推定法による多変量自己回帰モデル型制御システムを用いて，2つの型の機関ガバナを設計して同時に，プロペラ回転数とトルクを制御できる機関ガバナを提案した．

高石ら [12] は最近の海洋波方向スペクトルに関する研究成果から，方向波スペクトルの表現，測定技術，解析手法，予測理論，等についてレビューしている．波観測には，観測ブイ，船載式，海底設置型等の波高計アレイによる多点測法がある．3点以上の観測データに基いて，方向スペクトルをえる．観測データの時系列分析には，直後フーリエ変換法，パラメータ法，最尤法，拡張最尤法，最大エントロピー法，ベイズ型モデルによる推定法，フーリエベクトル法による分析法が用いられている．

3.3.2 海洋波と波計測データの時系列分析

海洋波は船舶，海洋構造物の力学的システムへの入力である．波のスペクトル構造は重要な意味を持っている．海面に存在する波浪について，波頂線が長く連なり，横方向には一様な場合を一次元的に考える．実際には横方向にも極めて不規則で，短波頂の不規則波であり，二次元的である．風波は種々の方向からの種々の周波数成分波の重ね合わせの考え方が確立され，波の観測データから，G. Neumann の波スペクトル，Pierson-Moskowitz のスペクトル，Bretschnejder のスペクトル，JONSWAP スペクトル等と著名な統計モデルが確立され，ISSC (国際船体構造会議) は不規則波スペクトル標準式を勧告している．より精密な波構造の二次元的表現として海洋波の方向スペクトルが重視されている．

方向スペクトルに関する基本式は次のようである．任意の波動量間のクロススペクトルと波数，周波数スペクトルの一般的な関係は次式で示される (磯部ら [4]，橋本 [17])．

$$\Phi_{mn}(\sigma)=\int_{\kappa} H_m^*(\kappa,\sigma)H_n(\kappa,\sigma)\times\exp\{-i\kappa(xn-xm)\}S(\kappa,\sigma)d\kappa \tag{1}$$

ここに，σ は角周波数，κ は波数ベクトル，$\Phi_{mn}(\sigma)$ は波動量 m と波動量 n のクロススペクトル，$H_m(\kappa,\sigma)$ は水面変動に対する変動量 m の伝達関数，i は虚数，x_m は波動量が計測されている平面座標，$S(\kappa,\sigma)$ は波数，周波数スペクトル，$*$ は共役複素数を表す．これを分散関係式を用いて，周波数 f と方向角 θ で表現すると，次式となる．

$$\begin{aligned}\Phi_{mn}(f)=\int_0^{2\pi} H_m^*(f,\theta)H_n(f,\theta)\times[&\cos\{\kappa(x_{mn}\cos\theta+y_{mn}\sin\theta)\}\\ &-i\sin\{\kappa(x_{mn}\cos\theta+y_{mn}\sin\theta)\}]S(f,\theta)d\theta\end{aligned} \tag{2}$$

但し，θ は波の到来する方向，f は周波数，κ は波数，$x_{mn}=x_n-x_m$, $y_{mn}=y_n-y_m$, $S(f,\theta)$ は方向スペクトルである．一般に，

$$S(f,\theta)=S(f)G(\theta|f) \tag{3}$$

のように表される．

ここに，$S(f)$ は周波数スペクトル，$G(\theta|f)$ は方向分布関数である．原理的には，無数の波動量間のクロススペクトルを求める事ができれば，逆変換をして方向スペクトルを求める事ができる．現実には，限られた波動量から方向スペクトルを推定しなければならない．したがって，波の観測方法，波動量，計測点等により種々の分析法が用いられている．方向スペクトルの標準型は次のようである．観測成果に基づいて提案された周波数スペクトルおよび方向分布関数の標準型の内代表的なものを示すと，風波スペクトルの標準形として次式がある．

$$S(f)=0.257H_{1/3}^2T_{1/3}(T_{1/3}f)^{-5}\exp\{-1.03(T_{1/3})^{-4}\} \qquad (4)$$

但し，$H_{1/3}$ は有義波高，$T_{1/3}$ は有義波周期である．この $S(f)$ は Bretshneider-光易スペクトルと呼ばれている．方向分布関数の一般的な形として，次の光易型方向分布関数が広く用いられている（Mitsuyasu [3]）.

$$G(f,\theta)=[2^{2s-1}\Gamma^2(s+1)/|\pi\Gamma(2s+1)|]\cos^{2s}(\theta/2) \quad -\pi\leqq\theta\leqq\pi \qquad (5)$$

但し，$f_1\geqq f_{1m}$ に対して $s=11.5f_1^{-2.5}$，$f_1\leqq f_{1m}$ に対して $s=11.5f_{1m}^{-7.5}f_1^5$

$f_1=2\pi uf/g,\ f_{1m}=2\pi uf_m/g,\ f_m=1/(1.4\,T_{1/3}),\ u$ は風速．

3.3.3 最近の時系列分析の例

多方向波に対する応答に関する研究が盛んである．船舶，海洋構造物の応答特性も方向スペクトルに対する応答が重視されている．竹沢ら [14] [15] は海洋構造物の研究において，方向波スペクトルに対する方向応答関数の推定法を水槽実験，数値シミュレーション法による検証を行い，各種海洋構造物の応答について論じている．

ここでは，最近の，実海域における観測データの時系列分析の現状を展望する．

実海域における方向スペクトル関連する研究について，小寺山ら [10] [11] は津屋崎海洋災害実験所沖合い約 2 km の地点に海洋観測ステーションを設け，海洋波，風速，風向等の総合的計測を行い，波高計アレイおよび 3 成分電磁流速計による方向スペクトルを実測した．水面変動データには最尤法を，水粒子速度データには拡張最尤法を用いて波方向スペクトルを推定した．また，山形県鶴岡市由良沖約 3 km の海域で，浮遊式海洋構造物 POSEIDON 号による計測実験が行われ，一連の観測データから，加藤ら [8] は，実験海域の風観測データの AR モデルによる変動風速スペクトルを求め，風速極値予測，ガストファクターを求めた．元吉ら [22] は，3 台の波高計アレイによる波計測データから，最尤法を用いて方向スペクトルを推定し，その特性を検討した．大松ら [6] は，実測した波方向スペクトルと動揺スペクトルを用いて，動揺の方向周波数応答関数を求めた．矢後ら [21] は，波浪による構造部材の歪に関する方向周波数応答関数を求めた．レインフロー法，振幅法で歪の頻度分布を求め疲労被害を推算した．尾股ら [7] は，実測した係留点の運動からの係留ラインの張力の時系列シミュレーションと実測張力との比較し，良い一致をえた．実測張力データに統計モデルを当てはめ，Hermite Moment モデルが非線形性の強い現象にも有効であることを示した．斉藤ら [13] は，自由動揺時の流体力特性を，自由動揺の時系列に対して，静的な非線形最適化を利用した時系列フィテイングによる流体力係数の推定を行った．加藤ら [9] は，多入力解析により，長周期運動に及ぼす風，波浪の寄与の度合いを調べた．長周期運動の時系列シミュレーションと実測値と良く一致した．長周期運動の統計解析から非線形性を示し，最大期待値など非線形予測理論でほぼ予測可能なことを示した．

実海域を航行する船舶に関連する研究では，井関，大津ら [2] [3] は航走する船体を一種の波高計と見なし，波と船体運動の計測データからクロススペクトル理論による船体運動の応答

関数をもちいて，方向スペクトルの逆算が可能と考え，実船実験で得た船体運動の時系列データを多次元 AR モデルを用いてクロススペクトル解析し，拡張最尤法および Bays モデルにより方向スペクトルの推定を行った．実船の船体運動データから実海面の方向スペクトルを推定し，目視観測の結果ならびに船載式波高計による観測結果および水槽試験の結果とを比較した．大津 [5] は実船の運航中の運動計測データから，動揺の生データを使って，横揺運動方程式の係数を統計的に推定した．連続領域で表現される方程式を，離散化した状態空間表現モデルを構築し，観測値からモデルのパラメータを最尤法により同定し，推定した．

3.3.4　統計学への期待

関連する理論，測定技術の進歩に伴い，分析の精度，緻密さが要求されている．観測データから海洋波の方向スペクトル推定および精度の評価の方法等の検討が望まれる．実海域での観測データから，非線形力学系における微分方程式の係数の推定法の発展を期待する．

参考文献

[1] Hutchison, B. L. and Bringloe, J. T. (1978). Application of Seakeeping Analysis, *Marine Technology*, **14**, 416-431

[2] Denis, St. M. and Pierson, W. J. (1953). On the Motions of Ships in Confused Sea, *Trans. SNA & ME*, **61**, 280-357

[3] Mitsuyasu, H et al. (1975). Observation of Directional Spectrum of Ocean Waves Using a Clover-leaf buoy, *Oceanography*, **5**, 750-760

[4] Ochi, M. K. and Bolton, W. E. (1973). Stataistics for Prediction of Ship Performance in a Seaway, Part I, Part II, Part III, *International Shipbuilding Progress*, **20**, 27-54, 69-121, 346-373

[5] Ohtsu, K. and Kitagawa, G. (1992). Applications of Auto Regressive Model to Control Ship's Motions and Marine Engine, The US/Japan Conf. on the Frontiers of Statistical Modeling, Tennesses Univ. U. S. A. Proced. 1-21

[1] 石塚正則他. (1992). 主機関の統計的同定と最適制御に関する研究(第2報)，日本造船学会論文集, **171**, 241-249

[2] 井関俊夫他. (1992). 船体運動データからの方向スペクトルの推定について，日本航海学会論文集, **86**, 179-188

[3] 井関俊夫他. (1992). 船体運動データからの方向波スペクトルの Bayes 推定，日本造船学会論文集, **172**, 17-25

[4] 磯部雅彦他. (1984). 方向スペクトルの推定における MLM の拡張，海岸工学講演会論文集，173-177

[5] 大津晧平他. (1989). 実船データによる動揺パラメータの統計的推定—連続型自己回帰モデルの応用—，日本造船学会論文集, **165**, 181-191

[6] 大松重雄他. (1991). 浮遊式海洋構造物の実験域実験，その4方向スペクトル波中における動揺応答，日本造船学会論文集, **169**, 187-193

[7] 尾股貞夫他. (1992). 浮遊式海洋構造物の実験域実験，その7係留ラインの張力特性，日本造船学会論文集, **171**, 373-380

[8] 加藤俊司他. (1990). 浮遊式海洋構造物の実験域実験，その1実験海域の風の特性，日本造船学会論文集, **167**, 125-135

[9] 加藤俊司他. (1992). 浮遊式海洋構造物の実験域実験，その9長周期運動のシミュレーションと統計予測，日本造船学会論文集, **171**, 81-92

[10] 小寺山亘他. (1992). 不規則波中の鉛直円柱に加わる波力に関する実験域実験，日本造船学会論文集, **171**, 185-194

[11] 小寺山亘他. (1992). 海洋観測ステーションによる沿岸波浪の方向スペクトルの計測，日本造船学会論文集, **171**, 501-509

[12] 高石敬史他. (1991). 海洋波の方向波スペクトルについて，日本造船学会誌, **740**, 94-113

[13] 斉藤昌勝他. (1992). 浮遊式海洋構造物の実験域実験，その8自由動揺時の流体力特性について，日本造船学会論文集, **171**, 283-290

[14] 竹沢誠二他. (1990). 浮遊型海洋構造物の方向スペクトル波中実験に基く方向周波数応答関数推定，日

本造船学会論文集, **168**, 261-266

[15] 竹沢誠二他. (1991). 方向スペクトル波中航行実験に基く船舶の方向周波数応答関数推定, 日本造船学会論文集, **170**, 163-171

[16] 福田淳一. (1961). 船体応答の統計的予測, 日本造船学会, 耐航性に関するシンポジウム, 99-119

[17] 橋本典明. (1987). ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定, 港湾技術研究所報告, 26, 2, 97-125

[18] 山内保文. (1956). 船の動揺の時系列論的解析について, 日本造船協会論文集, **99**, 47-64

[19] 山内保文. (1969). 海洋波中の応答, 日本造船学会, 耐航性に関するシンポジウム, 53-97

[20] 山内保文他. (1978). データ解析の動向（1）,（2）, 日本造船学会誌, **589**, 337-334, **591**, 436-447

[21] 矢後清和他. (1991). 浮遊式海洋構造物の実験域実験, その5波浪による構造材の歪について, 日本造船学会論文集, **170**, 609-618

[22] 吉元博文他. (1990). 浮遊式海洋構造物の実験域実験, その3実験海域の波方向スペクトルについて, 日本造船学会論文集, **168**, 253-260