

スーパーコンピューターと統計解析

計量経済学の分野を中心として

伴 金 美*

Statistical Analysis with Super-Computer in Econometrics

Kanemi Ban*

The purpose of this paper is to report the recent experiences in statistical analysis with super-computer. In the case of nonlinear stochastic problem, computer-intensive approach is very useful for the method of simulated moments, where numerical solution of nonlinear function is calculated effectively, or bootstrapping method are available. Super-computer is also powerful to present the property of complex structure of stochastic model graphically.

最近の計量経済学の分野で盛んに行われつつあるスーパーコンピューターの利用の現状についてまとめている。特に、非線形確率モデルの推定が重要になり、スーパーコンピューターによる数値解析がモデルの推定に重要な役割を果たしている。また、ブートストラッピング法の利用も進んでいる。さらに、モデルの数値解析だけでなく、モデルの構造を図示化することによりより多くの情報を的確に表現する手段として、その意義が評価されている。

1. スーパーコンピューター利用の現状

スーパーコンピューターの利用は、核融合反応モデル、大気循環モデル、流体モデル、衝突モデルや耐震構造モデルなど多くの分野で目ざましい成果を上げていることが知られている。その利用の目的は、実物による実験に代替するシミュレーション分析にある。したがって、実物による実験を行うことが困難な社会経済現象の解析にも役立つことが期待されている。ところが、それをスーパーコンピューターで解析した研究となると世界的にも少ない。実際、国際的な経済学・統計学関係の文献データベースを検索しても、スーパーコンピューターをキーワードとして検索できる文献はわずかである。ほとんどの場合、スーパーコンピューターよりも、パーソナルコンピューターによって統計解析の多くが行われている。もちろん、最近のパーソナルコンピューターの性能はメインフレームと同等かそれ以上の性能を有し、さらに費用が安価であることや統計ソフトウェアが充実していることなどがあげられる。しかし、パーソナルコンピューターで処理することの困難な多くの分野が存在することも事実である。特に、統計解析で行われるシミュレーション分析においては、スーパーコンピューターを使用しなければ、数週間にもわたる計算時間を必要とするものがある。

したがって、統計解析に見られるダウンサイジングの傾向にもかかわらず、スーパーコンピ

ューターを必要とするシミュレーション分析への要請は高まりつつある。例えば、経済政策の効果分析は、前述したように、実験によって実証することが不可能であることが知られている。この場合、経済主体の期待形成をどのように織り込むかによって、経済政策の効果に大きな違いの生じることが分かっている。しかし、それをシミュレーションで明らかにするには膨大な計算作業を必要とする。一方、医学や疫学の分野における統計解析の分野でも、動物を用いた実験が困難と成りつつあり、シミュレーションの重要性が再認識される傾向にある。しかし、パーソナルコンピューターを簡便に利用できる現状が、スーパーコンピューターを利用した萌芽的研究を阻害する傾向も見られる。実際、統計解析の分野において、スーパーコンピューターの利用を目的として予算が認められることは希である。

本報告の目的は、スーパーコンピューターの持つ高速・ベクトル・並列処理機能を必要とする研究分野を指摘することである。そこで、2節でパーソナルコンピューターの統計解析に留まることによる問題点を指摘する。次いで、3節ではスーパーコンピューターの特性を生かしたシミュレーション分析について述べる。さらに、4節では、経済学の分野で重要な問題となっている、経済政策の有効性を評価するための非線形合理的期待形成モデルの解法について述べる。最後に、5節では統計解析のグラフィカルな表現とスーパーコンピューターの役割について触れる。

2. 統計解析におけるコンピューター利用の限界

コンピューターの進歩は、統計解析手法の応用に大いに役立っている。大量のデータを加工したり、パラメーターについて非線形関数となる確率モデルの推定も短時間に行うことができる。したがって、モデルを変更して再推定することも容易であり、データに基づいたモデル探索に大きく貢献している。

しかし、多くの場合、パラメーターについて非線形であるものの、重要な役割を果たしている確率変数については線形関係を仮定することが多い。例えば、次の二つの確率モデルについてみれば、

$$f(Y, \theta) = u \quad (1)$$

$$g(Y, \theta, u) = 0 \quad (2)$$

Y : 観測値

θ : パラメーター

u : 誤差項

(1) 式で表される確率モデルが多く、(2) 式で表されるような確率変数について非線形関係となるモデルは少ない。もちろん、(2) 式を u について解析的に解くことができれば問題はないが、困難であることが多い。この場合、数値解法が必要となる。しかし、期待値の計算のように関数型が積分で定義される場合、計算量が膨大なものとなる。パーソナルコンピューターやメインフレームを用いた統計解析の多くは、このような複雑な計算を回避している。

さらに、計算の比較的簡単な(1)式で表されるモデルでも、関数型 f の形状について多くの制約条件が課されることが多い。この場合、 Y と u を所与として、パラメーター θ について解かれる。簡単化のために、

$$f(\theta) = 0 \quad (3)$$

とする。このような非線形モデルの解法に利用されるアルゴリズムとして、ニュートン法があ

る。ニュートン法によれば、 k 回目の反復過程で、パラメーターは次の式にしたがって更新される。

$$\theta^k = \theta^{k-1} - f'(\theta^{k-1})^{-1} f(\theta^{k-1}) \quad (4)$$

ここで、 $f'(\theta^{k-1})$ はヤコビアン行列である。ところで、このような求解過程が収束する条件は、次の2つの定理により示される。

定理 1

関数 $h(\theta)$ が次の条件を満たすとき、

$$(i) \quad \theta \in R^c \text{ であれば, } h(\theta) \in R^c$$

$$(ii) \quad \|h(\theta) - h(\theta')\| < L \|\theta - \theta'\| \\ 0 < L < 1, \{\theta, \theta'\} \in R^c$$

$\theta = h(\theta)$ は一つの解 θ^* が存在し、 $\theta^k = h(\theta^{k-1})$ は θ^* へ収束する。

定理 2

関数 $h(\theta)$ が微分可能で、 θ^* の近傍でスペクトル半径 $\rho(h'(\theta^*))$ が 1 より小さいとき、 θ^* の近傍で $\theta^k = h(\theta^{k-1})$ となる θ^k が存在して θ^* に収束する。

この定理をニュートン法に適用すれば、

$$h(\theta) = \theta - f'(\theta)^{-1} f(\theta) \quad (5)$$

と定義できる。このとき、

$$h'(\theta) = f'(\theta)^{-2} f''(\theta) f(\theta) \quad (6)$$

より、 $\theta^* = h(\theta^*)$ となる θ^* について、 $h'(\theta^*) = 0$ となる。したがって、 $\rho(h'(\theta^*)) = 0$ より、 θ^* の近傍ではニュートン法による求解過程が収束することが分かる。

ニュートン法の欠点の一つは、ヤコビアン行列 $f'(\theta)$ の計算である。 n 個のパラメーターの次元数は n となり、その逆行列を計算するために、パラメーター数の 2 乗の比例して計算量が増加する。もう一つの欠点は、微分可能性条件である。これは、パラメーター θ の変域に微分不可能な制約を課することができないことを意味する。この場合、不動点アルゴリズムを含む非線形計画法による解法が必要となる。したがって、さらに多くの計算量を必要とする。もちろん、これらのアルゴリズムはパーソナルコンピューターでも実現されている。しかし、非常に簡単なモデルに限られている。少なくとも、可能性と実用性は峻別することが必要であり、スーパーコンピューターが手軽に利用可能となれば、統計解析の方法についても大きな発展が期待される。

3. モンテ・カルロ技法

スーパーコンピューターの特性は、高速・ベクトル・並列処理にある。統計解析の中で、その機能を最も発揮できるのがモンテ・カルロ技法である。モンテ・カルロ法による分析は、膨大な繰り返し計算を限りなく行うことで精度を上げることができる点に特徴がある。したがって、限られた時間にどれだけ多くの計算を行うことができるかが分析の成果を決定する。その意味で、スーパーコンピューターが最も威力を発揮する分野である。

統計解析におけるモンテ・カルロ技法は、母集団の確率分布が未知であるときに、観測されたデータに基づいて確率モデルの標本分布を推定したり、推定量や予測量の統計的性質を解析

的に明らかにすることが難しいとき、その性質を数値的に明らかにするのに用いられている。さらに、推定量そのものを解析的に定義することが難しい非線形確率モデルの分析にも有効である。この分野での数値計算のアルゴリズムについては、Stochastic Substitution, Gibbs Sampler, Sampling-Importance-Samplingなどが知られているが、それらの比較については Gelfand and Smith (1990) で行われている。本節では、特に社会経済現象の統計解析で用いられるモンテ・カルロ技法の応用として、ブートストラップ法、予測量の確率分布の数値解析と非線形確率モデルの推定について述べる。基本的には、確率モデルの標本分布を数値計算で推定しようとするものである。わが国でも、この分野における研究が始まっており、Ogata (1990) などを注目すべき業績が生まれつつある。

ブートストラップ法

Efron (1979) は、未知の確率分布にしたがう母集団から無作為に抽出された標本を所与とすれば、元の確率分布の平均や分散を推定する方法として、ブートストラップ法が有用であることを明らかにした。このノンパラメトリック手法を線形モデルについて説明すれば以下の通りである。

まず、次の線形モデルについて、

$$y = X\beta + u \quad (7)$$

パラメーター β の推定量を b とし、その残差を e とする。この計算された残差 e から無作為に T 個を抽出して e_b とする。このとき、抽出された残差は元の標本に戻すものとする。次に、この e_b と推定値 b を用いて、

$$y_b = Xb + e_b \quad (8)$$

を計算する。この y_b と X を用いてパラメーターを再度推定する。これを繰り返して行えば、推定量の経験分布を求めることができる。すなわち、推定された残差から疑似データ (y_b, X) を発生させ、モンテ・カルロシミュレーション的に推定量の分布を明らかにしようとするものである。この場合、推定された残差から疑似データを発生させているため、シミュレーションで発生される推定値の分布は、元の確率分布 u の性質を保持している。したがって、 u の確率分布が特定化されない場合でも推定量の経験分布を計算することができる。

予測の信頼性

統計的予測手法の利点は、予測の信頼性を確率的に表すことができる点にある。例えば、次の線形連立方程式モデルについて考える。

$$\begin{aligned} By_t + \Gamma x_t &= u_t \\ Eu_t &= 0, Eu_t u_t' = \Sigma \end{aligned} \quad (9)$$

- y_t : 従属変数 (G・1)
- x_t : 外生変数 (K・1)
- u_t : 誤差項 (G・1)
- B : パラメーター (G・G)
- Γ : パラメーター (G・K)

(9) 式を構造方程式とすれば、予測は次の誘導形が基本となる。

$$\begin{aligned} y_t &= -B^{-1}\Gamma x_t + B^{-1}u_t \\ &= \Pi x_t + v_t \end{aligned} \quad (10)$$

このとき、 Π の推定量を $\hat{\Pi}$ とすれば、 $t=f$ 時点での予測量の分散・共分散行列は、

$$\Sigma_f = E[(\hat{\Pi} - \Pi)x_{fx}'(\hat{\Pi} - \Pi)'] + E(v_f v_f') \quad (11)$$

となる。いま、 $\hat{\Pi} = \hat{B}^{-1} \hat{\Gamma}$ および $v_t = \hat{B}^{-1} u_t$ の関係より、 B と Γ の推定量から予測量の漸近的分散・共分散行列を計算することができる。ここで、(11) 式の第 1 項はパラメーターの推定に起因する誤差、第 2 項は予測期間に発生するショックに起因する誤差である。

ところで、事後予測を評価するために、予測誤差の標準偏差を解析的に計算することが必要となる。Goldberger, Nagar and Odeh (1961) は、クラインモデルについて行っている。しかし、現在のような大規模非線形マクロ計量モデルに適用することは簡単ではない。最大の問題点は、疎行列とはならない大規模逆行列を、まるめの誤差なく行うことである。例えば、内生変数 150、外生変数 50 のモデルの場合、次元数が 7500 の逆行列の計算を必要とする。スーパーコンピューターを必要とする典型的な問題である。

一方、モンテ・カルロ技法によるシミュレーションは、予測誤差の確率分布を計算する方法として、その簡便性からよく用いられる。この方法では、確率項 u_t に疑似的に発生させたランダムショックを代入して事後予測を行い、その予測値の分布を計算する。これだけでは、第 1 項を無視して、第 2 項の予測期間に発生するショックに起因する誤差の与える影響をみるだけであるが、パラメーターの推定誤差を考慮したシミュレーションも可能である。実験によれば、予測誤差の約 90% は、予測期間の誤差に起因している。

なお、ランダムショックは次の方法で発生せる。まず、 G 本の定義式を除く各行動方程式について、内挿期間 T の誤差を計算する。これを U とすれば、 U は $(T \cdot G)$ の行列となる。次に、互いに T 個の独立した標準正規分布にしたがうランダムショックを発生させ、それを r とする。これより、

$$\eta = T^{-1/2} r U \quad (12)$$

すれば、 η は $(1 \cdot G)$ のベクトルとなるが、

$$\begin{aligned} E\eta' \eta &= T^{-1} E U' r' r U \\ &= T^{-1} U' U = \Sigma \end{aligned} \quad (13)$$

より、推定された期間の誤差の分散・共分散構造と一致する確率変数となる。この方法の利点は、標本数が方程式数に対して少ない場合、すなわち、 $T \leq G$ でも適用できることである。一方、Mariano and Brown (1980) は、ランダム変数を簡便に発生させる方法として、ブートストラップ法を提唱している。いずれにしても、大規模非線形モデルを数千回解くことが必要となる。

ここでは、関西経済研究センターマクロ計量モデルを用いて、モンテ・カルロシミュレーションを行う。まず、1980 年第 2 四半期から 1987 年第 1 四半期までの 28 期間について、63 本の行動方程式の誤差を計算し、それを U とする。次に 1987 年第 2 四半期から 1989 年第 2 四半期までの 8 期間について、外生変数に実績値を用いて、每期発生された 28 個の標準正規確率変数から η を計算し、それをランダムショック r として誤差項に代入してモデルを解く。これを 500 回繰り返す。この計算をインテル 386 の 20 メガヘルツの数値演算プロセッサ付きパーソナルコンピューターで計算すると 8 時間を必要とするのに対して、日本電気のスーパーコンピューター SX-3 で計算すれば 4 分程度ですむ。

ところで、予測の信頼区間を導くこと以外に、モンテ・カルロシミュレーションは多くの目的で行われる。その一つに、モデルの非線形性のチェックがある。マクロ計量モデルは、(9)

式のような線形方程式体系ではなく、次のような非線形モデルである。

$$f(y_t, x_t, u_t) = 0 \quad (14)$$

もし非線形性が高ければ、次のような問題が発生する。すなわち、(14) 式を解けば、

$$y_t = g(x_t, u_t) \quad (15)$$

したがって、 y_t の期待値は

$$y_t^e = Eg(x_t, u_t) = \gamma(x_t, \theta) \quad (16)$$

となる。ところが、モデルの解は $u_t = 0$ として計算された

$$y_t^i = g(x_t, 0) \quad (17)$$

である。したがって、一般的に $y_t^e \neq y_t^i$ となり、誤差である $(y_t - y_t^i)$ にバイアスが発生する。すなわち、平均平方誤差でモデルを選択すれば、片寄りが生じる可能性が高い。この問題の影響をみるには、(16) 式と (17) 式で定義される値を比較すればよい。

表1は、 $u_t = 0$ とするシミュレーションと、 u_t にランダムショックを与えてモンテ・カルロシミュレーションを行い、その平均値を実質国民総生産について計算したものである。第2列に y_t^e 、第3列に y_t^i を示している。両者の値の乖離は、最大でも0.17パーセント以内に納まっており、予想されるほど大きくない。したがって、ここで扱われているマクロ計量モデルの非線形性はそれほど高くないといえる。

表1 モンテ・カルロシミュレーション：実質国民総生産（兆円）

	実績値	y_t^e	y_t^i	標準偏差	棄却域確率(%)
87:2	308.65	307.11	307.19	2.32	4.0
87:3	314.91	312.56	312.23	2.79	2.0
87:4	320.92	316.78	316.86	3.22	4.0
88:1	326.78	319.77	319.74	3.49	3.0
88:2	325.79	325.01	325.01	3.96	5.2
88:3	333.34	328.10	327.84	4.23	3.2
88:4	337.20	331.13	330.91	4.59	4.2
89:1	343.16	335.56	334.98	4.33	4.4

表1は、予測誤差の標準偏差と、標準偏差の2倍に設定された棄却域に予測値が落ちる確率も示している。それによれば、誤差率で表した予測誤差の標準偏差は、1期目で0.75パーセントであるが、予測期間が長くなるにつれて大きくなり、4期目で1.09パーセント、8期目で1.29パーセントとなることが分かる。これは、予測の進行にともない誤差が累積することを意味している。しかし、連続する何れの期間予測についても、予測値が棄却域に落ちる可能性は、5%以内に留まっている。したがって、現実に観測された値が棄却域に落ちるとすれば、確率モデルの構造に変化のあったことを意味する。

そこで、1、4および8期目における実質国民総生産について、その予測値の度数分布を図1～図3に示している。それによれば、予測期間が短いとき、分散は小さいが歪んで分布している。それに対して、予測期間が長くなるにしたがって分布のひろがりも大きくなるが、同時に歪みも解消されることが分かる。ところで、4期目と8期目における実績値は分布の裾野に位置しており、ショックによる攪乱を考慮したとしても、モデルの構造が予測域において変化した可能性の高いことを示唆している。

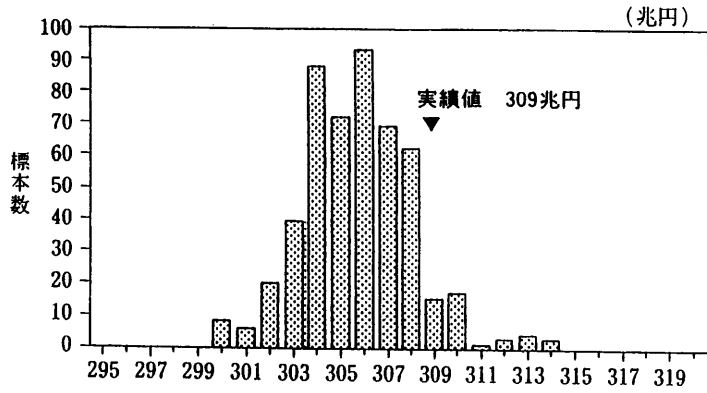


図1 国民総生産：1期先予測

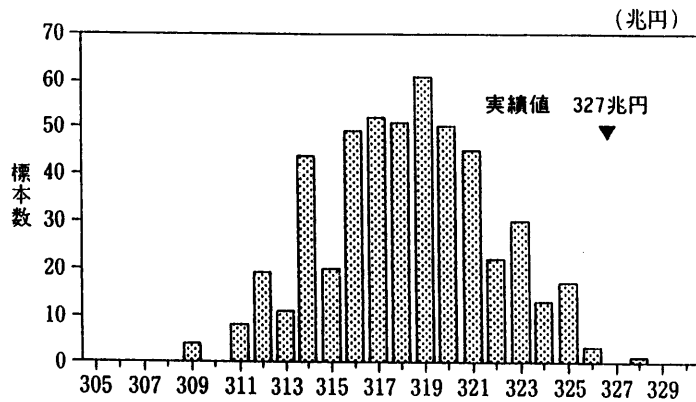


図2 国民総生産：4期先予測

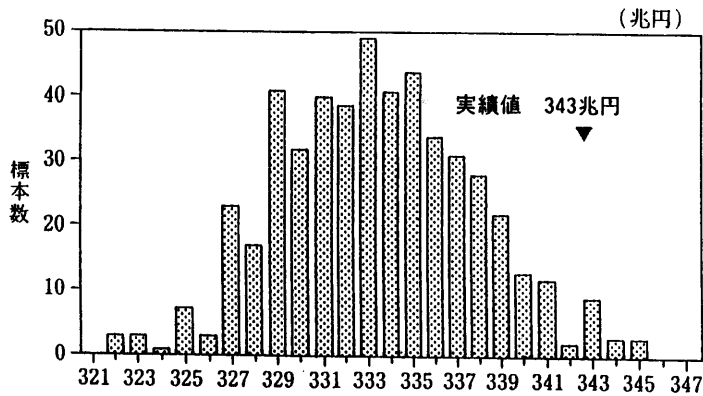


図3 国民総生産：8期先予測

非線形確率モデルの推定

現在、統計解析においてスーパーコンピューター利用による発展が最も期待される分野の一つに、非線形確率モデルがある。ここでは、まず非確率モデルを解くことが必要となる。さらに、パラメーターの推定においても困難な問題が発生する。ところが、ここでもモンテ・カルロ技法による数値解法が重要な役割を果たしている。

非線形確率モデルの例として、次のような動学的最適成長モデルを考えてみよう。このモデルは、貯蓄と投資の均衡を前提として、消費支出から生じる期待効用の割引現在価値を最大化する行動として定式化される。

$$\max_{C_t} E\left\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t) \mid \Omega_0\right\} \quad (18)$$

$$C_t + K_t - K_{t-1} = f(K_{t-1}, \theta)$$

(18) 式の右辺は、 t 期における生産量を資本ストック K_{t-1} の関数として表したものであり、左辺の C_t は消費、 $(K_t - K_{t-1})$ は投資である。この式は貯蓄と投資の均衡を表している。なお、 Ω_0 は初期時点で利用可能な情報とする。また、 θ_t は技術進歩を表す変数で、次の確率過程にしたがうものとする。

$$\ln \theta_t = \rho \ln \theta_{t-1} + \varepsilon_t \quad (19)$$

ここで、 $|\rho| < 1$ 、 ε_t は iid 正規分布とする。

ベールマンの最適性原理によれば、この確率的な動学的最適化モデルは次の最大化問題と等価である。

$$v(K_{t-1}, \theta_t) = \max_K \{f(K_{t-1}, \theta_t) - K_{t-1} + K + \beta E[v(K, \theta_{t+1}) \mid \Omega_t]\} \quad (20)$$

このとき、 $u(C_t) = \ln C_t$ であれば、最適決定ルールが確率変数 θ_t の対数線形関数として得られることが知られている。ところが、それ以外の効用関数形については、一般的には解析的な解を得ることはできない。したがって、数値的な解放が必要となる。

このようなモデルの解法アルゴリズムの比較が、Taylor and Uhlig (1990) によって行われている。その中で有力とされる方法の一つに、Tauchen (1990) のアルゴリズムがある。この方法は、 Ω_t を所与とし、連続分布となる確率変数 θ_{t+1} を離散近似して、モンテ・カルロ技法による疑似乱数を発生させ、最適解 K を数値的に求めるものである。すなわち、

$$v(K_{t-1}, \theta_t) = \max_K \{f(K_{t-1}, \theta_t) - K_{t-1} + K + \beta \sum_{i=1}^m \pi(\theta_{i,t+1}) v(K, \theta_{i,t+1})\} \quad (21)$$

の解として K を求めることができる。この場合、解の精度は近似度 m に比例するため、小規模モデルの場合でも膨大な計算量を必要とする。

ところで、非確率モデルの解がモンテ・カルロ技法による数値解法によって計算されることは、パラメーターの推定についても数値解法が重要な役割を果たすことを意味している。一般に、推定量は何らかのノルムを最小化するように定義されている。すなわち、

$$\min_{\theta} \|y - d(\theta)\|$$

として定義される。ここで、 y は観測値、 $d(\theta)$ はパラメーターの値が θ であるときの確率モデルから計算される値である。ところが、(21) 式の解として定義される最適資本ストック K の場合、それを θ の関数として解析的に表すことが困難である。したがって、モデルを推定するために必要な $d(\theta)$ の計算を行うために、モンテ・カルロ技法による数値解法が必要となる。この点に注目したのが、McFadden (1989) と Pakes and Pollard (1989) である。それによれば、モンテ・カルロ技法によって定義される推定量の一致性や漸近的正規性は、元の確率分布に対する近似度よりも、シミュレーションによる大数の法則の適用に大きく依存している。

4. 合理的期待形成モデル

経済行動モデルを分析する上で、予測のメカニズムを明示的にモデルに取り入れることが、外部環境の変化に対応する企業や消費者に動学的な行動を分析するうえで重要である。それを実現することは、政策の変更に対しても頑健なモデルの作成を可能にするだけでなく、モデル分析の新しい方向を示唆している。すなわち、伝統的な経済行動モデルでは、政策の変更のような外部環境の変化は、変更時点以降においてその効果が表れる。ところが、政策の変更があらかじめ分かっている場合には、企業や消費者は実施される時点よりも前に新たな行動を起こすと考えるのが一般的である。すなわち、将来に予想される変化が、現在の経済主体に与える影響をモデルで分析することが必要となる。この場合にも、スーパーコンピューターの利用が不可欠となっている。

Forward-Looking

企業の設備行動理論によれば、企業は設備投資による将来収益の増分と計画時点での投資財の購入価格を比較し、最適な投資量を決定する。したがって、将来に予想される税制の変更は、投資収益の予想値を変化させ、政策の変更が実際に行われる時点以前の投資行動に影響を与える。もちろん、政策の変更が突然実施され、それが事前に予想されない場合には、変更以前の時点における投資決定に影響しない。すなわち、政策の変更が事前に予想される場合と予想されない場合で、効果の現れる時点が異なることを意味している。さらに、政策の変更が一時的が、あるいは恒久的かにより影響に差違が生じる。ところが、伝統的なモデルによる政策シミュレーションでは、この違いを明確に区別することができない。現在では、予想を重視する Forward-Looking 型のシミュレーション分析が注目を集めている。これに対して、伝統的なモデルは Backward-Looking 型シミュレーションとよばれる。

まず、次のモデルについて考えてみよう。

$$Y_t = \beta E(Y_{t+1} | \Omega_{t-1}) + \gamma X_t \quad (22)$$

$$|\beta| < 1$$

ここで、 X_t は政策変数である。この式は確率的オイラー方程式と考えることができる。ところで、 $E(E(Y_{t+2} | \Omega_{t+1}) | \Omega_t) = E(Y_{t+2} | \Omega_t)$ となることから、

$$E(Y_{t+1} | \Omega_{t-1}) = \beta E(Y_{t+2} | \Omega_{t-1}) + \gamma E(X_{t+1} | \Omega_{t-1}) \quad (23)$$

とすることができる。これより、

$$Y_t = \beta^2 E(Y_{t+2} | \Omega_{t-1}) + \beta \gamma E(X_{t+1} | \Omega_{t-1}) + \gamma X_t \quad (24)$$

となる。この操作を繰り返すことにより、

$$Y_t = \beta^n E(Y_{t+n} | \Omega_{t-1}) + \gamma \sum_{i=0}^{n-1} \beta^i E(X_{t+i+1} | \Omega_{t-1}) \quad (25)$$

がえられる。このとき、合理的期待形成モデルでは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n E(Y_{t+n} | \Omega_{t-1}) = 0 \quad (26)$$

が仮定される。これは変数 Y_t の伸び率が割引率を上回らないことを意味する。この仮定が満たされれば、

$$Y_t = \gamma \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i E(X_{t+i} | \Omega_{t-1}) \quad (27)$$

とすることができる。

この Forward-Looking Model を用いて、政策の変更が事前に予測される場合の効果をみることにする。いま、 t 期の時点で、 $t+n$ 期以降の政策変数である X_{t+n} が、恒久的に ΔX だけ上方にシフトすることが事前に予測されたとしよう。このとき、変数 Y_t の変化は、

$$\Delta Y_t = \gamma \sum_{i=n}^{\infty} \beta^i \Delta X = \gamma \beta^n / (1-\beta) \Delta X \quad (28)$$

$$\Delta Y_{t+1} = \gamma \sum_{i=n-1}^{\infty} \beta^i \Delta X = \gamma \beta^{n-1} / (1-\beta) \Delta X \quad (29)$$

.....

$$\Delta Y_{t+j} = \gamma \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \Delta X = \gamma / (1-\beta) \Delta X \quad j \geq n \quad (30)$$

となる。すなわち、 $t+n$ 期の政策変更がそれ以前の t 期に影響する。このように、Forward-Looking 型のモデルでは、将来の政策変更が事前に予測される場合、それ以前の時点にも影響を与えることが分析できる。

次に政策の変更が事前に予測されない場合を考えてみよう。すなわち、 $t+n$ 期以降の時点で、政策変数 X_t が恒久的に ΔX 上方シフトすることが、 $t+n$ 期に初めて分かったとしよう。このとき、

$$\Delta Y_{t+j} = 0 \quad j < n \quad (31)$$

$$(32) \quad \Delta Y_{t+j} = \gamma \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \Delta X = \gamma / (1-\beta) \Delta X \quad j \geq n$$

すなわち、政策変更が事前に予測されない場合、政策変更の影響は変更される時点で初めて表れる。この結果は、伝統的なモデルによる政策シミュレーションと似ている。しかし、後でも述べるように、影響の大きさが瞬時に実現する点で大きく異なっている。

一方、政策の変更が $t+n$ 期の一時的なものであるとしよう。政策の変更が事前に予測されない場合についてみれば、

$$\Delta Y_{t+j} = 0 \quad j \neq n \quad (33)$$

$$\Delta Y_{t+j} = \gamma \Delta X \quad j = n \quad (34)$$

となる。したがって、政策の変更が一時的なものであれば、その効果も相対的に小さくなる。

Forward-Looking Model の解法

Forward-Looking Model とよばれるモデルの場合、大規模で非線形となる連立方程式体系を解くことは簡単ではない。このようなモデルの解法で最もよく使用される方法は、Fair and Taylor (1983) の方法である。

まず、次の (22) 式と同じモデルについて考える。

$$Y_t = \beta E(Y_{t+1} | \Omega_{t-1}) + \gamma X_t + u_t \quad (35)$$

ここで、 u_t を i. i. d. とする。このモデルの解は

$$Y_t = \gamma \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i E(X_{t+i} | \Omega_{t-1}) + u_t \quad (36)$$

となることが示されている。一方、変数 X_t が一次の自己回帰モデル

$$X_t = \rho X_{t-1} + v_t \quad (37)$$

に従い、 $|\beta\rho| < 1$ とすれば、(36) 式は

$$Y_t = \gamma\beta/(1-\beta\rho) X_{t-1} + u_t \quad (38)$$

となる。モデルについて、Fair and Taylor は次のような方法で、(38) 式と同じ数値解を得るアルゴリズムを提案している。ここでは、方程式に h 期先の期待変数が含まれるモデルについて説明する。(35) 式では、 $h=1$ である。

ステップ 1

適当な K と δ を選択し、 $j=0, 1, 2, \dots, K+2h$ の各期について、期待変数 $E(Y_{t+j} | \Omega_{t-1})$ に適当な値を想定し、それを $e_j(1, K)$ とする。

ステップ 2

$j=0, 1, 2, \dots, K+h$ の各期について、 $u_{t+j}=0$ とし、さらに、期待変数 $E(Y_{t+j} | \Omega_{t-1})$ を $e_j(1, K)$ 、 X_{t+j} を $E(X_{t+j} | \Omega_{t-1})$ に置き換えてモデルを解き Y_{t+j} を計算し、その値を $e_j(2, K)$ とする。

ステップ 3

$e_j(2, K)$ を用いてステップ 2 を計算し、その値を $e_j(3, K)$ とする。これを繰り返して、 $|e_j(i+1, K) - e_j(i, K)| < \delta$ となるまで続ける。

ステップ 4

ステップ 3 が収束すれば、その値を $e_j(K)$ とする。すなわち、 $e_j(1, K)$ 、 $j=K+h+1, K+h+2, \dots, K+2h$ を所与として、(35) 式を満たす $e_j(K)$ 、 $j=1, 2, \dots, K+h$ を求める。次に $K=K+1$ として、ステップ 1 から 3 を繰り返す。このとき、 $e_j(K)$ について $|e_j(K+1) - e_j(K)| < \delta$ が成立するまで続ける。

ステップ 5

ステップ 4 で計算された値、 $e_j(K)$ $j=0, 1, \dots, h$ を用いてモデルを解く。

上記の簡単なモデルでは、ステップ 1 から 3 を繰り返すことにより、 $e_{k+2}(1, K)$ を所与として、

$$e_j(i+1, K) = \beta e_{j+1}(i, K) + \gamma \rho^j X_{t-1} \quad (39)$$

$$j=0, 1, \dots, K+1$$

が計算される。(39) 式の漸化式を $i=K+2$ について解くと、

$$\begin{aligned}
e_0(K+3, K) &= \beta e_1(K+2, K) + \gamma X_{t-1} \\
&= \beta(\beta e_2(K+1, K) + \gamma \rho X_{t-1}) + \gamma X_{t-1} \\
&\dots\dots \\
&= \beta^{k+2} e_{k+2}(1, K) + \gamma \rho \sum_{h=0}^K (\beta \rho)^h X_{t-1}
\end{aligned} \tag{40}$$

すなわち、 $e_0(K+3, K)$ は初期値、すなわち端点である $e_{k+2}(1, K)$ に依存していることが分かる。ところが、 $|\beta| < 1$ であるので、 $K \rightarrow \infty$ とすれば、 $e_0(K+3, K)$ は初期値に依存せず、(38) 式の右辺の第1項と一致する。

この方法による合理的期待形成モデルの場合、収束計算に必要な繰り返しの回数は次の通りである。

$$N_1 N_2 N_3 \{h + K + 1 + (N_3 + 1)/2\}$$

ここで、 N_1 は前節で述べた非線形モデルの解を計算するために必要な回数である。一方、 N_2 はステップ1から3までの収束解を得るために必要な回数、さらに、 N_3 はステップ4の収束に必要な回数である。前節の関西経済研究センターのモデルの場合、10 四半期の計算に必要な繰り返しの回数は理論的には約40万回となる。したがって、386の20メガヘルツのパーソナルコンピュータによる計算時間は、120時間以上を必要とする。したがって、モデルの解を計算するために必要な計算量は、期待変数を含まないモデルと比較して極端に増大する。一方、スーパーコンピュータを使用すれば、20分程度で終了する。

非線形合理的期待モデルの解法

Fair and Taylorの解法の大きな利点はその簡便性にある。しかし、非線形モデルの場合には、その解は真の値と一致しない。これは、(16)式で定義される y_t^i と(17)式で定義される y_t^f が一致しないことに起因する。Fair and Taylorによる解は y_t^f に相当する。したがって、Forward-Lookingモデルの解法においても、モンテカルロ技法による数値シミュレーションが必要となる。したがって、非線形モデルの場合と比較して、計算時間は天文学的に増大する。

5. グラフィックによる表示

スーパーコンピュータによって得られる膨大な計算結果を、視覚的に分かりやすく表示することの重要性が認識されつつある。さらに、計算結果の可視化を行うためのソフトウェアの発達も目ざましく、統計解析においても重要な役割を果たしている。統計解析におけるグラフィック表現の重要性については、後藤他(1992)のサーベイにまとめられているので、ここでは、統計解析の中で頻りに用いられる最尤推定量を用いる場合に重要となる尤度を、スーパーコンピュータを利用して視覚的に表現する例を示す。

最尤推定量では、パラメーターの初期値の与え方が重要な役割をはたしており、最尤推定量の計算以上に初期値の設定に時間がとられるのが一般的である。ところが、尤度を可視化することができれば、モデルの確率的特性を明らかにすることが容易となる。これは初期値の設定や最適化のアルゴリズムの動学的特性を明らかにする上でも重要である。図4は、次の動学的最適消費行動モデルについて、その対数尤度をパラメーター β と γ について示したものである。

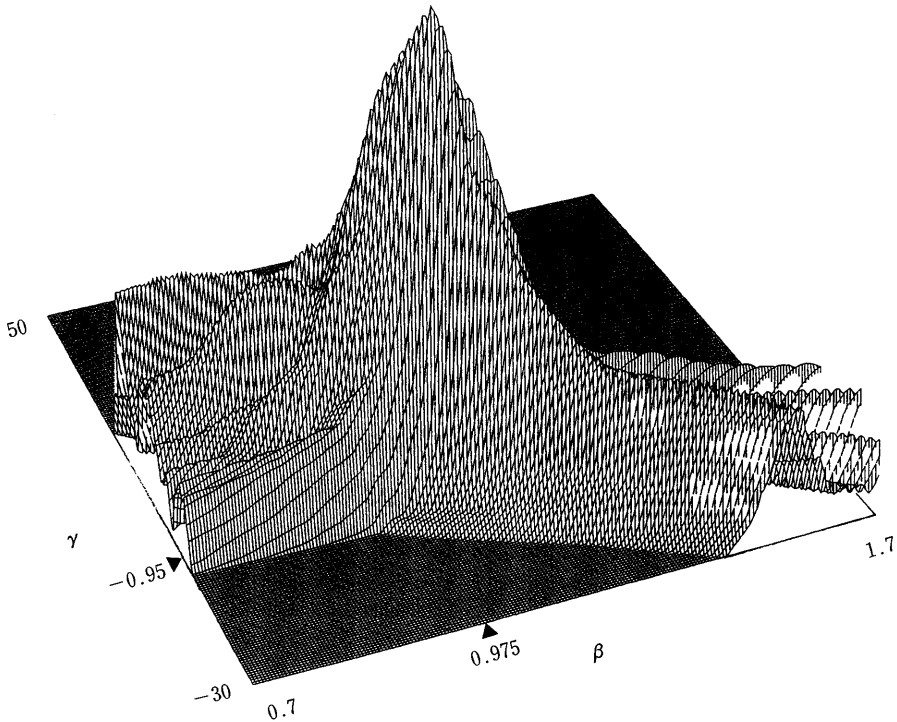


図4 動学的最適消費行動モデルの対数尤度グラフ

$$\max E_0 \beta^t \frac{C_t^{-\gamma} - 1}{\gamma}$$

$$\text{S. T. } A_{t+1} = (1+r_t)Y_t - C_t + A_t$$

Y_t : 所得, C_t : 消費, A_t : 資産残高, r_t : 資産収益率

このモデルにおいて、 $\beta=0.975$, $\gamma=-.95$ として 100 期間の最適消費解 C_t を求め、次のオイラー条件から尤度を求めたものである。

$$E_t \{ \beta (C_{t+1}/C_t)^{\gamma-1} (1+r_t) - 1 \} = 0 \tag{41}$$

グラフでは、縦横 200 のポイントにおける尤度が示されている。それによれば、パラメーター β と γ の真の値の近傍で尤度が最大となっている。ただ、 γ と比較して β の尤度に与える影響が非常に小さいことが分かる。このようなグラフによる尤度表示は、大域での最尤推定量を求める際の重要な情報となる。この例では、パーソナルコンピューターでも 80 分程度で計算できるが、スーパーコンピューターを使用すれば、より細分化されたポイントごとに尤度が計算できる。例えば、縦横 10000 のポイントについて計算すれば、パーソナルコンピューターでは 138 日を必要とするが、スーパーコンピューターでは 6 時間で済む。ポイントを細かくすることの利点は、ズーム機能を用いて特定の区画における尤度分布を簡単に表示することができることにある。

スーパーコンピューターと計算結果の可視化システムが手軽に利用可能となれば、このような非線形確率モデルの解法に大きく貢献することは確実であり、より複雑な社会経済現象のメカニズムが解明されることを期待できる。

謝辞：一橋大学経済研究所安田 聖助教授には、スーパーコンピュータのハード的側面についての多くの示唆をいただいている。さらに、レフェリーの方々には、とかく計量経済学の狭い範囲に閉じ込めりがちな筆者に対して、統計解析の立場から多くの教示をいただいている。これらの方々には、記して感謝申し上げる。

参 考 文 献

- [1] Efron, B., 1979, Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife, *The Annals of Statistics* 7, 1-26.
- [2] Fair, R. C., and J. B. Taylor, 1983, Solution and Maximum Likelihood ESTimation od Dynamic Rational Expectations Model, *Econometrica* 51, 1169-1189.
- [3] Gelfand, L. E. and A. F. M. S. Smith, 1990, Sampling-Based Approaches to Calculating Marginal Densities, *Journal of American Statistical Association* 85, 398-409.
- [4] Goldberger, A. S., A. L. Nagar and H. S. Odeh, 1961, The Covariance Matrices of Redyced-Form Coefficients and of Forecasts for a structural Econometric Model, *Econometrica* 29, 556-573.
- [5] McFadden, D., 1989, A method of Simulated Moments for ESTimation of Discrete Response Models without Numerical Integration, *Econometrica* 57, 995-1026.
- [6] Ogata Yoshihiko, 1990, A Monte Caro Method for an Objective Baysian Procedure, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 42.
- [7] Pakes, A. and D. Pollard, 1989, Simulation and the Asymptotics of Optimization Estimator, *Econometrica* 57, 1027-1057.
- [8] Tauchen, George, 1990, Solving the Stochastic Growth Model by Using Quadrature Meyhods and Value-Function Iterations, *Journal of Business and Economic Statistics* 8, 49-51.
- [9] Taylor J. B. and H. Uhlig, 1990, Solving Nonlinear Stochsatic Growth Models: A Comparison of Alternative Solution Methods, *Journal of Business and Economic Statistics* 8, 1-17.
- [10] 後藤昌司他, 1992, 統計グラフィックスの最近の発展—顧客の創造と視覚表現の諸法—, 日本統計学会誌 第21巻, 333-351.