日本統計学会誌
第22巻，第3号（増刊号），1993年
557頁〜583頁

計量経済学における回帰診断

森棟公夫*，坂野慎哉**

Regression Diagnostics in Econometrics

Kimio Morimune* and Shinya Sakano**

回帰診断とは回帰式に関する諸前提に対する検定の総称であるが，その主たる内容は誤差項に関する諸前提の検定と回帰式の定式化に関する検定に二分できよう．本論では，誤差項については静学的および動学的回帰における系列相関（第1章），分散の均一性（第2章2.1節），ARCH モデル，正規性の混合検定（第2章2.2節）を解説する．回帰式の定式化については RESET 検定（第2章2.3節）を解説する．最終の第3章は非定常時系列の問題，特に単位根の検定，誤差修正モデル，そして共和分の推定及び検定を扱う．

In this paper, some diagnostic tests in econometrics are surveyed from the pedagogical point of view. The diagnostic test is the general naming for testing procedures against presumptions on regression equations. In particular, it includes presumptions associated with the error term and presumptions associated with the specification of the regression equations. Tests for the serial correlation are explained in the first chapter, followed by tests heteroscedasticity, and normality. The ARCH model of heteroscedasticity and the RESET test for the specafication of the regression equation are also explained. The analysis on the non-stationary time series may be the most recent development in econometrics, and standard techniques of the unit-root tests, error correction model, and the cointegrations are reviewed in the last chapter.

序　　論

本稿は計量経済学における回帰診断のうち系列相関の検定（第1章），不均一分散の検定（第2章2.1節），誤差項の正規性検定（第2章2.2節），そして RESET 検定（第2章2.3節）をとりあげ検定の理論的な導出を解説する．検定は主にラグランジュ乗数検定法を中心に扱い，可能なかぎり補助回帰式（auxiliary regression）における係数の有意性検定に帰着するよう解説を工夫した．もちろん尤度比検定などでも回帰診断は行えるのだが，回帰診断の主流は最小2乗法のパッケージを用いた補助回帰式にあると筆者は理解する．

回帰診断とは回帰式における諸前提に対する検定の総称である．主たる内容は誤差項に関する諸前提の検定と回帰式の定式化に関する検定に二分できよう．本論のうち誤差項については静学的および動学的回帰における系列相関，分散の均一性，正規性そして両者の混合検定を扱う．不均一分散のもとでの推定法ならびに ARCH モデルの解説も与える．また回帰式の定式化については RESET 検定のみを解説する．前者については残差の CUSUM 検定やコレログラムによる診断が抜けているし，後者については Chow 検定に代表される回帰係数の安定性，入

論文受付：1993年1月　改訂受付：1993年3月　受理：1993年3月
* 京都大学経済研究所，〒606 京都市左京区吉田本町
** 京都大学大学院経済学研究科，〒606 京都市左京区吉田本町

れ子関係にない(non-nested)回帰式の検定，そして回帰式に含まれる説明変数の選択問題が抜けていることに賢明な読者は気づかれるであろう．回帰式の安定性については最近のCROSS VALIDATIONとかROLLING REGRESSIONといった華やかな名のもとの分析もあるが本稿では触れない．本稿で取り上げるのは基本的であるが数ある教科書ではあまり扱われていない諸問題や，比較的新しいが既に計算パッケージに含まれている手法のうち重要と思える検定である．

最終の第3章は非定常時系列の問題を解説する．非定常時系列分析は回帰診断の範疇から飛び出した課題かの印象を与えるかもしれないが，時系列が定常であるという時系列分析における前提に対する診断検定であることには違いない．またいうまでもなく，計量経済理論において最近十年間においてめざましく発展したのは非定常性分析であって，この章無くしては最近の計量経済学を語ることはできないと考えられる．Fuller [15]は単位根の検定を与えたが，当時この検定が最近の十年間にみられたほどの重要性をもつに至ると誰が予想しえたであろうか．同様に共和分の重要性にさえ，筆者を含めた多くの計量経済学者は遅ればせながら気づいたのである．

非定常時系列に関して滝の流れのように現われ出る最近の諸文献を読み切れていないのはひとえに筆者の非力の為である．ただ単位根の検定から始まり，次に誤差修正モデルをそして共和分の解析に至る最近の分析の主たる内容は今のところ手近な教科書類にその解説が与えられていない．このような現状を踏まえれば，計量分析にたずさわる人々にとっては基本的な手法の概説も教育的な価値があろう．ただし3章で説明する最尤法を中心とした手法が将来にわたり支持されるかどうかについては，異論の残るところであろう．本稿で扱わない共和分分析における分布論上の展開は本号の「統計的時系列分析の現状と展望」の中の田中勝人氏による解説を参照されたい．

1章 系列相関の検定

1.1 静学的回帰

線型回帰式を

$$y_t = x_t'\beta + u_t, \quad t=1,\cdots,n \tag{1.1}$$

と記そう．ただし x_t' は，定数項を含むK個の説明変数の観測値からなる行ベクトルである．以下の分析では，しばしば回帰式を一般化して y はn期にわたる観測値からなる $n\times1$ ベクトル，XはK個の説明変数に関するn個の観測値からなる $n\times K$ 行列，β はK個の未知回帰係数からなる $K\times1$ ベクトル，u はn個の誤差項(u_t)からなる $n\times1$ ベクトルとする．さらに．b を β の最小2乗推定量ベクトル，e をn個の最小2乗残差(e_t)からなる $n\times1$ ベクトルとしておく．便宜上 e のラグ・ベクトルを e_{-1}，e_{-2} などと表現するが，ラグ・ベクトルの未観測値 e_0 などは0とする．誤差項は一次の自己回帰過程 $AR(1)$，$u_t=\phi u_{t-1}+\varepsilon_t \quad t=-\infty,\cdots,n$，にしたがっているとする．ただし定常性を保つために，ϕ の絶対値を1よりも小であると仮定し，ε_t は分散が σ_ε^2 の標準乱数（ホワイト・ノイズ）とする．検定の帰無仮説は $H_0{:}\phi=0$，対立仮説は $H_a{:}\ \phi\neq0$ である．計量分析の実証的な作業のなかで，誤差項の系列相関の検定，および系列相関を棄却できなかった場合の推定問題は非常に重要な位置を占める．実際，次に説明するDW（ダービン・ワトソン）検定統計量の値は推定結果の報告に必ず含まれる．そしてDW検定は，それにともなうCO（コクラン・オーカット）変換および変換後の推定とともに，標準的な計量分析における常套的な手法を形成しているのである．しかしながら近年にみられる新しい傾向は，この常套手法を否定する方向にあるということができよう．以下，まず古典的な方法を説明す

る．

1.1.1 ダービン・ワトソン検定： 検定統計量はDW 比とよばれ，$d=\Sigma_{2,n}(e_t-e_{t-1})^2/\Sigma_{1,n}e_t^2$，と定義されている（Durbin and Watson [12] など．またHarvey [20] 及び畠中 [22] 4章にすぐれた解説がある.)．この検定統計量が，時系列 $\{y_t\}$，$t=1,\cdots,n$ に対する系列相関の検定統計量から生まれてきたことは明らかであろう（Anderson [2]，6.5)．時系列 $\{y_t\}$ の代わりに，回帰の残差が用いられているのである．この式の右辺の分子を展開し，さらに，$r=e'e_{-1}/e'e$，と定義すれば，近似的に $d\fallingdotseq 2(1-r)$ となる．統計量 r は e_t と e_{t-1} の間の標本自己相関係数であるから，系列 $\{e_t\}$ が正の自己相関を持つなら，すなわち r が正の値ならおおよそ $d<2$ となり，負の自己相関を持つなら $d>2$，自己相関がないなら $d\fallingdotseq 2$ となる．検定統計量 d は，$M_X=I-X(X'X)^{-1}X'$，Aを対角要素が(1 2…2 1)，対角要素の上下が－1，他の要素が0である $n\times n$ 行列とすれば，$d=u'M_XAM_Xu/u'M_Xu$，と変換できる．したがって ε が正規分布に従って分布するとすれば，帰無仮説のもとで，d の分布を計算することができる．この d から M_X を除けば，単純時系列の際の系列相関係数を表現する二次形式がえられる．

d の臨界値は説明変数Xに依存するため，Xに応じて変化する．そのため，d の臨界値の代わりに説明変数に依存しない上限 (d_u) と下限 (d_L) の表が作成されている．これらは $d\leqq 2$ となったとき，すなわち対立仮説が $H_a{:}\phi>0$ であると考えられるときに，$d<d_L$ ならば帰無仮説 H_0 を棄却し，$d>d_u$ ならば棄却しないと結論するための指標である．$d_L<d<d_u$ となるときには結論を保留する．対立仮説が $H_a{:}\phi<0$ のときには，d の代わりに $4-d$ を上と同様に d_L や d_u と比較して結論を出す．ところがこのような近似法を用いるために，ϕ が正であるという仮説の検定において d_u が2を越える場合が生じる．先に与えた d と r の間の近似式からみれば，ϕ が正であるという対立仮説のもとでは d が2より大なることは不自然である．

DW 検定では回帰式 (1.1) は定数項を含む必要があり，かつ (1.1) の説明変数行列Xは外生でなくてはならない．もし説明変数Xがラグ付き被説明変数を含むなら行列Xは誤差項と相関をもつから，DW 検定を使うことはできない．さらにDW 検定は対立仮説が低次のARやMAモデルの際にもかなりよい検出力をもつことが知られている (Harvey [20]，6.6)．Savin and White [39] は，標本数および説明変数の数についてより詳しい表を求めた．DW 検定では説明変数行列Xに依存しない臨界値を求めようとしたため，Xに依存しない臨界値の上限と下限をもって厳密な臨界値に置き換えることが試みられた．しかし，厳密な臨界値の計算を含んだプログラム・パッケージも市販されている．

1.1.2 コクラン・オーカット推定： DW 検定の結果，誤差項に系列相関が検出された場合には，最小2乗推定量は不偏性および一致性を保つものの有効な推定量ではなくなる．それゆえに通常のルーチンプログラムを使うと，係数の有意性があるべき値より強く示される結果となる．望ましい推定法は一般化最小2乗法 (GLS) で，自己回帰係数ϕが既知であるならば x_t をXの第 t 行として，回帰式を

$$\sqrt{1-\phi^2}y_1=\sqrt{1-\phi^2}x_1'\beta+\sqrt{1-\phi^2}u_1 \tag{1.2}$$

$$(y_t-\phi y_{t-1})=(x_t-\phi x_{t-1})'\beta+\varepsilon_t,\quad t=2,\cdots,n \tag{1.3}$$

と変換して β に関する最小2乗推定を行うに等しいことが知られている．特に (1.3) 式のような変数間の操作をCO（コクラン・オーカット）変換と呼ぶ．

通常の場合は ϕ が未知であるので，まず第一段階として (1.1) を最小2乗推定し β の一致推定量を求め，さらに最小2乗残差をもちいて ϕ を推定する．次にその推定値を (1.2) および (1.3) に代入して近似的に有効な β の推定量を得るのである．必要であればこの計算プロセス

を反復してもよい．結果として得られる推定量は不偏ではないが一致性をもち，かつ漸近的に有効である．係数の有意性検定は (1.2) (1.3) の最小2乗推定よりもたらされる t 比を用いて行えばよい．この t 比の帰無仮説のもとでの分布は標準正規分布によって近似できる．最尤推定量をここで導出して，CO 法との関連を見てみよう．対数尤度関数は正規性の条件のもとで，

$$\ln L \propto -\frac{n}{2}\ln\sigma_\varepsilon^2-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2 \tag{1.4}$$

となる．ただし $\varepsilon_t=u_t-\phi u_{t-1}$ かつ初期条件は無視する．最大化のための一次の条件は

$$\sum_{t=2}^{n}(x_t-\phi x_{t-1})\{(y_t-\phi y_{t-1})-(x_t-\phi x_{t-1})'\beta\}=0 \tag{1.5}$$

であり，最尤推定量はこの条件を満たさないといけない．ϕ が既知であれば (1.3) に最小2乗法を応用しても同じ結果をうる．Beach and MacKinnon [5] を参照のこと．

1.1.3　定式化の誤り (COMFAC 分析)：　以上が DW-CO 常套法の内容である．そして計量経済学の応用文献を見れば理解できるように，最小2乗推定の度に必ず d 値が示され，帰無仮説が棄却された際には，系列相関に対する工夫が施されるのである．特に CO 法による再推定はあたかも当然な分析法と扱われてきた．しかし従来，第1段の最小2乗推定と第2段の GLS 推定結果が違いすぎることに疑念をもつ人が少なくなかった．繰り返すが，最小2乗推定も一致性を保持しており，系列相関の存在によって失うのは有効性だけなのである．それにもかかわらず，数値的にかなり異なる推定値が計算結果として得られる事が多い．

回帰式を経済問題にあてはめた際に，誤差項が自己回帰過程に従う様な発生メカニズムは考えにくいが，逆に誤差項が MA 過程をもつような経済メカニズムは生じやすいといわれる．このような背景のもとで，DW 検定は系列相関の検定ではなく，回帰式からの説明変数の脱落，あるいは定式化の誤りの検定であるといわれるようになった (Hendry 他 [23]，p 1047)．もし z_t が他の説明変数と独立でかつ回帰式から脱落しているとすれば，誤差項は $(z_t+\varepsilon_t)$ からなる．変数 z_t が系列相関を持てば，これは誤差項の系列相関として認識されよう．以下説明を加えよう．

もし DW 検定で自己回帰が見出されると誤差項は AR (1) あるいは，同等だが，$u_t=\varepsilon_t/(1-\phi L)$ と表現できる．そこで回帰式の両辺に $(1-\phi L)$ をかけると，回帰式は

$$y_t=\Pi_1 y_{t-1}+x_t'\Pi_2+x_{t-1}'\Pi_3+\varepsilon_t \tag{1.6}$$

という形式をとる．この変換で明らかなように，誤差項の自己回帰はラグ付き変数 y_{t-1} と x_{t-1} を回帰式から除いたために生じたのである．もちろん制約 $H:\Pi_3=-\Pi_1\Pi_2$ によって (1.6) 式は (1.3) に帰着する．しかし，制約 H の妥当性は，制約 H を帰無仮説とする尤度比検定や LM 検定などにより検討すべきものである．この検定は実証上大きな意味をもっている．というのは従来 DW-CO 法で推定されてきた回帰式をこのような一期のラグをもつ動学的回帰式に書き換え，制約 H の尤度比検定を行うと，頻繁に制約が棄却されるのである．制約が正しいならば (1.6) と (1.1) は同等である．しかし，この際も制約を無視して (1.6) を最小2乗推定したとしても有効性が失われるのみで，一致性は保持される．逆に制約が誤っているならば，(1.1) あるいは (1.3) は偏りのある推定量をもたらすのである．以上のような分析のもとで，制約のない動学的回帰式は，DW-CO 法に対立する考え方であると理解されるに至った (Mizon and Hendry [30])．

説明を繰り返そう．ラグ操作子を L とすれば，$(1-\phi L)$ を (1.1) にかけて (1.3) が導出さ

れ，逆に (1.3) を $(1-\phi L)$ で割って (1.1) が導出される．したがって (1.2) 式を無視すれば系列相関を伴う回帰式 (1.1) は (1.6) の特殊形にすぎないと理解できよう．あるいは，先の制約のもとで生じる COMMON-FACTOR，因数分解の意味での共通因子，$(1-\Pi_1 L)$ で両辺を割ってえられるのが，静学的回帰式 (1.1) である．この割り算において，$\varepsilon_t/(1-\phi L)$ を u_t と記せば，$u_t=\phi u_{t-1}+\varepsilon_t$ を満たすから誤差項の系列相関が生じる．つまり誤差項の系列相関は，制約付き回帰式の表現を単純化したために生じるのである．以下，制約に誤りがある場合を分析しよう：$\Pi_3=-\Pi_1\Pi_2+\mu$ とすれば，(1.6) は

$$(y_t-\phi y_{t-1})=(x_t-\phi x_{t-1})'\beta+x_{t-1}'\mu+\varepsilon_t \tag{1.7}$$

となり，$x_{t-1}'\mu$ が CO 変換式で欠落していることがわかる．さらに (1.7) を $(1-\phi L)$ で割れば

$$y_t=x_t'\beta+z_{t-1}'\mu+u_t \tag{1.8}$$

と表現できる．ここで，$z_t=\phi z_{t-1}+x_t$ となることに注意されたい．制約のない(1.6)の観点から (1.1) 式を見ると，(1.1) 式では x_t の分布ラグ変数 z_t が欠落しているのである．回帰式の正しい定式化が (1.8) であるときに (1.1) 式を最小 2 乗推定した場合には，推定量が偏りをもつことは明らかであろう．また先に述べたように，$H:\mu=0$ を検定するには，(1.8)における z_{t-1} の有意性を調べるより，(1.6) と (1.3) を尤度比検定で比較するほうが手続き上はるかに容易である．ワルド検定については Maddala [29] (pp. 255-257) を参照されたい．

1.1.4 他の検定法，特に補助回帰法： 系列相関の検定法としてフォン・ノイマン比などいくつかの検定統計量が知られているが，最近よく利用されるのは LM(ラグランジュ乗数)検定である．以下対数尤度関数 (1.4) より，未知母数の列ベクトルを δ，未知母数に関する誤差項の一次微分列ベクトルを $w_t=(\partial\varepsilon_t/\partial\delta)$ とすれば，LM 検定統計量は一般的に

$$LM=\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\Sigma\varepsilon_t w_t'(\Sigma w_t w_t')^{-1}\Sigma w_t\varepsilon_t \tag{1.9}$$

ともとまる．分母と分子に含まれる未知係数は帰無仮説のもとで推定すればよい．帰無仮説のもとでの漸近分布は一般に自由度が「検定される制約の数」のカイ 2 乗分布である．同様に LM 検定は残差 e_t に関する w_t への回帰式，$e_t=w_t'\delta+\text{error}$，よりえられる決定係数 R^2 を用いて，nR^2 と定義できる (Godfrey [18])．決定係数 R^2 は回帰式の適合度を示す指標で，1 ― (残差 2 乗和／被説明変数の平均まわりの変動和) と定義される．回帰式における誤差項の系列相関を検定する本章の問題では，$w_t=(\partial\varepsilon_t/\partial\phi,\ x_t')'$ である．ここで 1 次微分は e_{-1} で推定でき，かつ e_t と x_t は直交するから，LM 検定統計量 (1.9) は

$$LM=\frac{n}{e'e}e'e_{-1}(e_{-1}'M_X e_{-1})^{-1}e_{-1}'e \tag{1.10}$$

と最小 2 乗残差により表現できる．自由度 1 のカイ 2 乗分布を漸近的な帰無分布とすればよい．残差に関する回帰式の方式で考えると，LM 検定統計量は，$e_t=x_t'\beta+\phi e_{t-1}+\text{error}$，における決定係数 R^2 の n 倍になる．(常套的には M_X を両辺に掛けて決定係数を求めればよい．)さらに LM 検定統計量は帰無仮説のもとで ϕ の t 比の 2 乗にも漸近的に等しい．ただし分母の違いにより，nR^2 より F や t の方が大きな絶対値をもつ．この t 比は

$$y_t=x_t'\beta+\phi e_{t-1}+\text{error} \tag{1.11}$$

という回帰式のϕに関する t 比と同等である．漸近的な帰無分布は標準正規である．この(1.11)

式は，補助回帰法（Auxiliary Regression Approach）としてよく知られる一般的分析法の一例である．最小2乗法のルーチンプログラムを利用している場合には，第一段でもとまった最小2乗残差を，一期のラグを付けて説明変数の一つとして回帰式に含め，再推定すればよい．補助回帰より計算される t 検定も LM 検定も漸近的に等しく，帰無仮説のもとでの漸近分布は標準正規である．これらの検定法は，正規性に強く依存した DW 検定（あるいはその臨界値）と一線を画していることにも注意すべきである．

1.1.5　MA モデルの推定および MA 過程の検定：　DW 検定は対立仮説が MA 過程の際にもよい検出力を持つことが知られている．従って，DW 検定で帰無仮説が棄却されたならば，回帰式の MA 推定も試みられなくてはいけない．帰無仮説が棄却された段階では誤差項の AR モデルと MA モデルは同等に扱われる必要がある．以下 MA モデルの最尤推定法を説明しよう．一次の MA 過程を，$u_t=\varepsilon_t+\theta\varepsilon_{t-1}$，と記すと，尤度関数は（1.4）のままであるが，$\varepsilon_t$ の内容が $u_t-\theta\varepsilon_{t-1}$ に変化する．係数 β と θ に関する最尤推定量は，$w_t=(\partial\varepsilon_t/\partial\delta_{(i)})$ とし Gauss-Newton の一般式

$$\delta_{(i+1)}=\delta_{(i)}-\left(\sum_{t=1}^{n} w_t w_t'\right)^{-1}\left(\sum_{t=1}^{n} w_t\varepsilon_t\right) \tag{1.12}$$

に未知係数の初期値を与えて，反復計算して求めればよい．ここで $\varepsilon_t=(y_t-x_t'\beta)-\theta_{(i)}\varepsilon_{t-1}$，$(\partial\varepsilon_t/\partial\beta)=-x_t-\theta_{(i)}(\partial\varepsilon_{t-1}/\partial\beta)$，$(\partial\varepsilon_t/\partial\theta)=-\varepsilon_{t-1}-\theta_{(i)}(\partial\varepsilon_{t-1}/\partial\theta)$，$\varepsilon_t$ の一次導関数の初期値と ε_0 の初期値は0とすることが多い．また情報行列はブロック対角であるから反復計算は β と θ に関して独立に行えばよい．要するに β と θ の推定は，ε_t の $(\partial\varepsilon_t/\partial\beta)$ への回帰と，ε_t の $(\partial\varepsilon_t/\partial\theta)$ への回帰から成立する．誤差分散 σ_ε^2 の帰無仮説のもとでの推定は自明であろう．

ここで θ を所与として β の推定を考えてみよう．Gauss-Newton 法では $w_t=(\partial\varepsilon_t/\partial\beta)$ として $\beta_{(i+1)}=\beta_{(i)}-(\Sigma w_t w_t')^{-1}(\Sigma w_t\varepsilon_t')$，となり調整項は $\beta_{(i)}$ および θ で評価される．他方，y_t^* および x_t^* を，各々 y_t と x_t の分布ラグ変数 $(1+\theta L)^{-1}y_t$ および $(1+\theta L)^{-1}x_t$ とすると，$\varepsilon_t=(1+\theta L)^{-1}u_t=y_t^*-x_t^{*\prime}\beta_{(i)}$，となり，また $(\partial\varepsilon_t/\partial\beta)=-x_t^*$ となる．だから Gauss-Newton の結果は，所与の θ のもとで $\beta_{(i)}$ にかかわらず，$\hat{\beta}=(\Sigma x_t^* x_t^{*\prime})^{-1}\Sigma x_t^* y_t^*$，となる．この推定量は誤差項の MA（1）仮定のもとで回帰式を $(1+\theta L)$ で割り，回帰式を，$y_t^*=x_t^{*\prime}\beta+\varepsilon_t$，と変換した上で最小2乗推定して求まる．AR（1）の CO 変換と同等に，MA（1）に分布ラグ変換を応用したのである．注意すべきことは分布ラグ変換は，例えば $y_t^*=y_t-\theta y_{t-1}{}^*$ などと反復計算で数値が求まることであろう．

最後に $H_0{:}\theta=0$ の LM 検定を導いてみよう．LM 検定量は回帰式 $\varepsilon_t=\theta(\partial\varepsilon_t/\partial\theta)+(\partial\varepsilon_t/\partial\beta)\beta+\mathrm{error}$ の決定係数を R^2 とすれば nR^2 となる．また帰無仮説のもとでは $\varepsilon_t=u_t$，$(\partial\varepsilon_t/\partial\theta)=-\varepsilon_{t-1}=-u_{t-1}$，$(\partial\varepsilon_t/\partial\beta)=-x_t$ であるから，回帰式 $u_t=\theta u_{t-1}+x_t'\beta+\mathrm{error}$ の決定係数を R^2 として，$LM=nR^2$ となる．帰無仮説のもとで u_t は最小2乗推定の残差 e_t で置き換えればよいから，nR^2 は（1.10）と一致する．つまり対立仮説のもとで誤差項が MA（1）であろうと AR（1）であろうと，LM 検定統計量には変化が生じないのである．この結果は高次の MA および AR モデルについても維持される．補助回帰式を用いた検定も，全く同じ結果をもたらす．

1.2　動学的回帰

1.2.1　ダービンの h 検定：　説明変数にラグ付き被説明変数が含まれると，d 統計量において誤差項ベクトルと説明変数行列が相関をもつため系列相関の検定に DW 検定を用いることはできない．代わりに Durbin [11] の考案した h 検定が使われることが多い．回帰式はラグ付き被説明変数を含めて

(1.13) $y_t=\beta_1 y_{t-1}+\cdots+\beta_s y_{t-s}+x_t'\beta+u_t,\ \ u_t=\phi u_{t-1}+\varepsilon_t \quad (t=1,\cdots,n)$

とし，LM 検定の導出を説明しよう．回帰式が (1.13) であっても尤度関数は (1.4) のままだから，誤差分散の推定量は帰無仮説のもとで $\sigma_\varepsilon^2=\Sigma u_t^2/n$ となる．以下 ϕ のスコアは帰無仮説のもとで

(1.14) $$\frac{-\partial \ln L}{\sqrt{n}\partial\phi}=\frac{\Sigma u_{t-1}\varepsilon_t}{\sqrt{n}\sigma\varepsilon^2}$$

となる．また ϕ の平均情報行列を一部計算すると

(1.15) $$\frac{\partial^2 \ln L}{n\partial^2\phi}=\frac{\Sigma u_{t-1}{}^2}{n\sigma_\varepsilon^2}$$

だから，帰無仮説のもとで評価すれば近似的に 1 になる．ϕ とラグ付き被説明変数の係数に関する 2 次導関数は

(1.16) $$\frac{\partial^2 \ln L}{n\partial\phi\partial\beta_j}=\frac{\Sigma\{y_{t-j-1}\varepsilon_t+u_{t-1}(y_{t-j}-\phi y_{t-j-1})\}}{n\sigma_\varepsilon^2}\quad j=1,\cdots,s$$

となる．同様の 2 次導関数を各 j について求めベクトルにまとめると，帰無仮説のもとで漸近的に (1，0，…，0) となる．外生変数の係数との交差微分はすべて 0 である．対数尤度の回帰係数に関する 2 次微分行列は，帰無仮説のもとで回帰変数の積率行列を σ_ε^2 で割って求まるから，漸近共分散行列の (1,1) 要素は交差微分ベクトルの情報を使うと，{ 1 －逆転された積率行列の 1， 1 要素} となる．この波括弧内の第 2 項は，y_{t-1} を他の説明変数に最小 2 乗回帰したときの残差 2 乗和の逆数に $n\sigma_\varepsilon^2$ を掛けた量である．帰無仮説のもとでの最小 2 乗回帰を考えれば，この要素は $\mathrm{var}(\sqrt{n}b_1)$ となるので，LM 検定統計量は

(1.17) $$LM=\frac{nr^2}{1-\mathrm{var}(\sqrt{n}b_1)}$$

となる．ここで r は (1.13) から計算される OLS 残差の 1 階の標本自己相関係数である．h 統計量は $h=r\cdot\mathrm{sqrt}[n/\{1-\mathrm{var}(\sqrt{n}b_1)\}]$ と LM 検定の平方根で与えられる．この統計量の値は，回帰式 (1.13) を最小 2 乗推定して求められ，帰無仮説のもとで漸近的に標準正規分布にしたがう．なお， 1 よりも $n\,\mathrm{var}(b_1)$ が大であるときは，h 統計量は計算できない．

1.2.2 他の検定法，特に補助回帰法： 動学的な回帰式における系列相関も補助回帰式を用いて検定することができる．u_t を (1.13) の残差で定義して $\varepsilon_t=u_t-\phi u_{t-1}$，また導関数は $(\partial\varepsilon_t/\partial\beta')=-(y_{t-1},\cdots,y_{t-s},x_t')$，$(\partial\varepsilon_t/\partial\phi)=-u_{t-1}$ だから，回帰式

(1.18) $$e_t=\beta_1 y_{t-1}+\cdots+\beta_s y_{t-s}+x_t'\beta+\phi e_{t-1}+\mathrm{error}$$

の決定係数を用いて，LM 検定統計量は nR^2 と定義できる．ラグ付き被説明変数も含めた説明変数の全体を Z とし，M_Z を M_X の様に定義すれば，(1.10) と同様に

(1.19) $$nR^2=\frac{n}{e'e}e'e_{-1}(e_{-1}'M_Z e_{-1})^{-1}e_{-1}'e$$

となる．(1.18) との両辺に M_Z を掛けて決定係数を求めても上式は導出できる．また F や t 検定との差異は分母に見いだされる．帰無仮説のもとでは漸近的に $e_{-1}'e_{-1}/n=\sigma_\varepsilon^2$ かつ $e_{-1}'Z/n=$

$\sigma_\varepsilon^2(1,0,\cdots,0)$ だから，(1.19) は近似的に (1.17) に等しい．さらに (1.18) 式における ϕ の t 比は，帰無仮説のもとで (1.19) の平方根に漸近的に等しいから，LM 検定のかわりに (1.18) 式における ϕ の t 検定も利用できる．この ϕ の t 比は，回帰式

$$y_t=\beta_1 y_{t-1}+\cdots+\beta_s y_{t-s}+x_t'\beta+\phi e_{t-1}+\text{error} \tag{1.20}$$

における ϕ の t 比と同等だから，この補助回帰式を用いて t 検定を行えばよい．漸近的な帰無分布は標準正規である (Durbin の m 検定量とよばれる)．

1.2.3 推　　定：　系列相関が存在する場合には回帰式 (1.13) を最小 2 乗推定すると偏りが生じ，また一致性を保つこともできない．CO 変換を適用すると，変換された説明変数は $(y_{t-1}-\phi y_{t-2})$, $(x_t-\phi x_{t-1})$ などとなり誤差項は標準乱数 ε_t となるが，$(y_{t-1}-\phi y_{t-2})$ と誤差項は相関する．それゆえに CO 変換式に最小 2 乗法が適用できないのである．尤度関数は (1.4) のままだから，Gauss-Newton 法で近似的に最尤推定が可能である．便宜上，ラグつき被説明変数を各々 1 個しか回帰式に含まないとしておこう．また定数項も除いておく．$\varepsilon_t=u_t-\phi u_{t-1}$ であるから $(\partial\varepsilon_t/\partial\beta_1)=-(y_{t-1}-\phi y_{t-2})$, $(\partial\varepsilon_t/\partial\beta)=-(x_t-\phi x_{t-1})$, $(\partial\varepsilon_t/\partial\phi)=-u_{t-1}$ と求まり，各未知係数の一致性をもつ初期値さえ与えられれば反復計算により最尤推定量が求まる．初期値は通常操作変数法で与えられる．

ここで初期値を操作変数で求め，Gauss-Newton 法で第 2 段階の推定量を求めよう．先の 3 つの導関数を $-z_{1t}$, $-z_{2t}$, $-z_{3t}$ と記し，かつ $\delta'=(\beta_1\beta'\phi)$ と記すと，Gauss-Newton 法は $\hat\delta_{(2)}=\hat\delta_{(1)}+(Z'Z)^{-1}Z'\varepsilon$ となる．ところで $\varepsilon_t=(y_t-\hat\phi y_{t-1})-z_{1t}\hat\beta_1-z_{2t}'\hat\beta$ でかつ $(Z'Z)^{-1}Z'z_1$ などは単位ベクトルになるから，$\hat\delta_{(2)}=(00\hat\phi)'+(Z'Z)^{-1}Z'(y-\hat\phi y_{-1})$ と簡略化される．ところがこの右辺の第 2 項は，回帰式

$$y_t-\hat\phi y_{t-1}=(y_{t-1}-\hat\phi y_{t-2})\beta_1+(x_t-\hat\phi x_{t-1})'\beta+\phi^+e_{-1}+\text{error} \tag{1.21}$$

の最小 2 乗推定量である．この最小 2 乗回帰が畠中 [21] によって導出された「残差調整済み Aitken 推定量」で，漸近的に有効である．ただし ϕ の推定量は $(\hat\phi+\hat\phi^+)$ とする．

1.2.4 定式化の誤り (COMFAC 分析)：　静学的回帰において説明した COMFAC 分析をここでも繰り返そう．単純化のため回帰式 (1.13) に含まれるラグ付き被説明変数は 1 個のみとする．誤差項が AR（1）過程に従うならば，両辺に $(1-\phi L)$ を掛けかつ係数に関する制約を無視すると，回帰式の形式は

$$y_t=\Pi_1 y_{t-1}+\Pi_2 y_{t-2}+x_t'\Pi_3+x_{t-1}'\Pi_4+\varepsilon_t \tag{1.22}$$

となる．つまり回帰式から y_{t-2} と x_{t-1} が除かれたゆえに誤差項に AR（1）過程が生じるのである．この変数を排除する手続きは以下のように説明できる．まず変数 y と，x の第 i 要素のラグ多項式は，各々 $(1-\Pi_1L-\Pi_2L^2)$ および $\Pi_{3i}(1+(\Pi_{4i}/\Pi_{3i})L)$ である．この全てのラグ多項式に共通因子 $1-\phi L$ が含まれるなら，(1.22) の両辺を $(1-\phi L)$ で割ることにより (1.13) が導かれる．そしてこの変換により誤差項に系列相関 AR（1）が生じるのである．そのためには，制約 $H:\Pi_1=\phi+\beta_1$, $\Pi_2=-\beta_1\phi$, $\Pi_{4i}=-\Pi_{3i}\phi$ が保持されないといけない．以上の分析より，制約 H の有意性を検定して初めて，(1.22) 式ではなく (1.13) 式を推定する妥当性が生まれることがわかる．(1.22) 式は最小 2 乗推定すればよい．制約が正しい時でもこの最小 2 乗推定は一致性を保つ．制約が誤っている場合には，(1.13) の推定は偏りを生じるものである．もし u_t が AR（2）であれば，$u_t=\varepsilon_t/(1-\phi_1L-\phi_2L^2)$ などと表現できるが，この場合は (1.22) 式にさらに y_{t-3} および x_{t-2} が含まれることが理解できよう．u_t が ARMA 過程の場合などに分析を拡張することは容易である．

1.2.5 MA モデルの推定および MA 過程の検定： 静学的回帰の場合と同様に回帰式(1.13)の誤差項が MA (1)過程により発生しているとしよう．このような回帰式は特に ARMAX モデルとよばれる．被説明変数は AR 構造，誤差項は MA 構造をもち，そして説明変数 x が回帰式に含まれるからである．正規性の仮定のもとでは尤度関数は (1.4) となるから，Gauss-Newton 法は (1.12) 式の方式で与えられる．また $\varepsilon_t = y_t - \beta_1 y_{t-1} - x_t'\beta - \theta\varepsilon_{t-1}$ だから，ε_t の未知母数に関する導関数は (1.12) 以下の計算に $\partial\varepsilon_t/\partial\beta_1 = -y_{t-1} - \theta(\partial\varepsilon_{t-1}/\partial\beta_1)$ を加えればよい．ε_t およびその導関数は適当な初期値を与えれば反復計算によって値が決まる．ただし，操作変数法などにより未知母数の一致推定量が初期値として与えられれば，第 2 段階で一致かつ漸近的に有効な推定量となる．θ の一致性をもつ初期値は，r が近似的に $\theta/(1+\theta^2)$ になることを用いて求められる．帰無仮説のもとで誤差項を標準乱数とする LM 検定も容易に導くことができる．帰無仮説のもとでは $\partial\varepsilon_t/\partial\beta = -x_t$，$\partial\varepsilon_t/\partial\theta = -\varepsilon_{t-1}$，$\partial\varepsilon_t/\partial\beta_1 = -y_{t-1}$ であるから LM 検定統計量は (1.19) に一致する．さらに帰無仮説のもとでは LM 検定統計量は h 統計量の 2 乗と漸近的に等しい．

1.2.6 高次の系列相関： 動学的回帰モデルにおいて誤差項が高次の自己回帰過程 AR (p) に従うかどうか検定するとしよう．つまり誤差項の発生は $u_t = \phi_1 u_{t-1} + \cdots + \phi_p u_{t-p} + \varepsilon_t$ だが，帰無仮説では誤差項は標準乱数とする．この場合，ラグ付き最小 2 乗残差を用いると，補助回帰式は

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \cdots + \beta_s y_{t-s} + x_t'\beta + \phi_1 e_{t-1} + \cdots + \phi_p e_{t-p} + \text{error} \tag{1.23}$$

となる．そして LM 検定統計量は，M_Z を両辺にかけて決定係数を求めれば

$$nR^2 = \frac{n}{e'e} e'W(W'M_Z W)^{-1}W'e \tag{1.24}$$

となる．ただし W はラグ付き最小 2 乗残差を列とする $n \times p$ 行列である．対立仮説のもとで誤差項が p 次の移動平均過程 MA (p) に従う場合にも，LM 検定統計量は (1.24) に一致する．漸近帰無分布は自由度が p のカイ 2 乗分布である．F 検定では分母が変わり，LM 検定統計量よりも大きな値をもたらす．

静学的回帰では対立仮説が AR (p) であろうと MA (p) であろうと，LM 検定統計量は一層の簡略化が可能である．まず Z にラグ付き被説明変数が含まれないため $\mathrm{p\,lim}(W'Z/n) = 0$ であり，帰無仮説のもとでは異なるラグ付き残差間の相関も漸近的に 0 である．だから $(1/n)W'M_Z W$ は $\sigma^2 I$ で近似できる．結局 LM 統計量は r_i を i 次の標本自己相関係数として，$LM \cong n\sum_{i=1,p} r_i^2$ と単純化できるが，これは風呂敷 (Portmanteau) 検定統計量である．この統計量と Box-Pierce の Q 統計量は漸近的に同じである．LM 統計量も風呂敷統計量も，漸近的な帰無分布は自由度が p のカイ 2 乗分布である．

今までの分析では帰無仮説のもとで誤差項に標準乱数が想定されたが，対立仮説が AR であろうと MA であろうと，その次数が同じであれば同じ検定統計量がもたらされた．しかしこれは一般的な結果ではなく，通常は帰無仮説が ARMA (p, q) ならば，対立仮説が ARMA ($p+m$, q) か ARMA ($p, q+m$) かによって検定法は違ってくるのである．紙面を節約するために証明などはしないが，たとえば帰無仮説では ARMA (1,1)，対立仮説では ARMA (1,2) あるいは ARMA (2,1) とする例を分析すれば，違いは明らかになるだろう．いずれにしても LM 検定統計量は，ε_t を $(\partial\varepsilon_t/\partial\beta,\ \partial\varepsilon_t/\partial\phi,\ \partial\varepsilon_t/\partial\theta)$ などに回帰する際の決定係数 nR^2 により定義できるのである (Godfrey [16], [17])．

2章　その他の検定

2.1　不均一分散

回帰式 (1.1) において，通常は誤差分散は全観測期間にわたり均一であると仮定される．不均一分散の状況では最小2乗推定量は有効性を持たず，さらに標準誤差の推定に偏りが生じて誤った検定結果がもたらされる恐れがある．特に t 検定統計量の分母が過小評価され有意性が逆に過大評価されてしまうことはよく知られている．畠中 [22]（2章）に不均一性に関する優れたサーベイが見られる．

不均一分散が生じる回帰式の一例を紹介しよう．通常，回帰式 (1.1) の係数ベクトル β は定数と仮定される．もし係数ベクトルが時間に依存するとすれば，(1.1) は，$y_t=x_t'\beta_t+u_t$，のように書き換えることができる．ここで β_t は t に依存して変化する $(k+1)\times 1$ のベクトルだが，特に β_t が未知の平均 β_M のまわりで確立的な変動をしているとし，$\beta_t=\beta_M+\varepsilon_t$，と定式化されるとしよう．ただし ε_t は u_t と相関の無い確率変数ベクトルでその分散は $\sigma_\varepsilon^2 I$ とする．推定すべき母数を β_M とすると，u_t の平均はゼロ，分散は一定であるとしても回帰式の誤差項は新たに $v_t=x_t'\varepsilon_t+u_t$ と定められ，分散は $\sigma_t^2=\sigma_\varepsilon^2 x_t'x_t+\sigma^2$ と不均一になる．

2.1.1　不均一分散の検定：　Breusch and Pagan [6] は，誤差項が不均一な分散を持っていないかどうかを検定するためのラグランジュ乗数検定法を導出した．以下説明しよう．回帰式 (1.1) において，その誤差項は平均ゼロ，分散 $\sigma_t^2=h(z_t'\alpha)$，の独立な正規分布に従うと仮定する．ここで関数 $h(\cdot)$ は特定化されていないが時間に対して不変であり，2次導関数が存在すると仮定する．α は制約のない $p\times 1$ の母数ベクトルで，回帰係数 β とは無関係であるとする．誤差分散の説明変数 z_t は，回帰式 (1.1) の説明変数 x_t とは異なる独立変数で，その第1要素は定数とする．以下考察される検定では，帰無仮説では誤差項は均一分散であるとされ，対立仮説では不均一であるとされる．つまり帰無仮説のもとでは定数項以外の α 係数は0である．この不均一分散の一般的な表現は，諸文献に現れるほとんどの定式化を含んでおり，$\sigma_t^2=\exp(z_t'\alpha)$ とか $\sigma_t^2=(z_t'\alpha)^m$ も可能な定式化である．ふさわしくない関数形としては，例えば，$\sigma_t^2=z_t'\alpha$ が定数項を含まない場合がある．また σ_t^2 が $E(y_t)^2$ に正比例するなら，やはり帰無仮説が対立仮説に含まれないから利用できない．実際は簡便さのため $\sigma_t^2=z_t'\alpha$ を採用することが多いようだ．x_t と z_t は Amemiya [1] によって与えられた正則条件を満たすものとする．

回帰式 (1.1) から求まる最小2乗残差ベクトルを e とし，誤差項の分散の推定量を $s^2=e'e/n$ とする．対立仮説のもとで誤差項の分散が $\sigma_t^2=h(z_t'\alpha)$ と与えられるなら，均一分散の帰無仮説を検定するためのラグランジュ乗数統計量は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
LM&=(1/2)f'Z(Z'Z)^{-1}Z'f \\
&=(1/2)[g'Z(Z'Z)^{-1}Z'g-n^{-1}(\Sigma g_t)^2]
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

ここで，分散比を $g_t=e_t^2/s^2$ とし，分散比を要素とする列ベクトルを g，$f_t=g_t-1$ を要素とする列ベクトルを f とする．(2.1) の最右辺は，g_t を z_t 全体に回帰した時の回帰の平方和から，g_t の平均の平方の n 倍を引いて2で割ったものになっている．この検定統計量は帰無仮説のもとで漸近的に自由度 $p-1$ のカイ2乗分布にしたがう．LM を計算するためには，対立仮説のもとでのベクトル α の次数 p があらかじめ決められていなくてはならない．補助回帰式法では，回帰式

$$
e_t^2=z_t'\gamma+\text{error} \tag{2.2}
$$

において，定数項以外の回帰係数に関する F 検定などによっても不均一分散の検定を行うこと

ができる．LM 検定統計量は上式に $M_1=I-1(1'1)^{-1}1'$ を掛けて nR^2 を求めればよい．この場合は分母が e_t^2 の標本分散になるが，この標本分散は誤差項の 4 次の積率の推定量であり，正規性の仮定のもとでは $2s^4$ も推定できる．この置き換えをすると，補助回帰式による LM 検定は(2.1)の LM 検定と一致する．いずれにしろ，LM 法の検出力は他の検定統計量よりもたいして劣らないから，計算の簡単さも考慮すればLM 法は応用に適した検定法である．

2.1.2 不均一共分散行列の推定： 回帰式 (1.1) の誤差項が不均一分散を持つとき，誤差項の共分散行列を対角行列Dと記そう．未知母数 β の最小 2 乗推定量 b の分布は，平均はβ，共分散行列は

$$(X'X)^{-1}X'DX(X'X)^{-1} \tag{2.3}$$

となる．もし (1.1) の誤差項の分散が均一ならば，$E(uu')=\sigma^2 I$ となり，σ^2 の不偏推定量を使って推定量の共分散行列の推定量が求まる．しかし分散が不均一ならば，(2.3) には未知母数の行列Dが残るから，(2.3) を使って β に関する統計的推測を行うことはできない．例えば t 検定統計量でさえ標準的な計算公式を使ったのでは過大評価されてしまい，有意水準が大きくなりすぎるのである．より正確な推測を行うには少なくともDの行列の一致推定が必要である．しかし不均一分散の仮定のもとでD行列には既に n 個の未知母数が含まれるため一致推定は不可能である．White [44] は，モデル (1.1) の最小 2 乗残差より求めた行列 $\hat{D}=\mathrm{diag}(e_1^2,\cdots,e_n^2)$ を (2.3) のDと置き換えれば，(2.3) が一致推定できることを示した．

いま回帰式 (1.1) において，(x_t', u_t) は t に関して互いに独立だが必ずしも均等に分布しない (i.n.i.d) n個の確率変数ベクトルとし，x_t と u_t は共分散を持たないとする．ベクトル (x'_t, u_t) に対する i.n.i.d の仮定は，回帰式の誤差項が不均一分散を持ちかつ説明変数が確率的であるという状況を許すものである．ここで $V=E(X'DX/n)$, $M=E(X'X/n)$ とし，さらに最小 2 乗残差を e_t とおいて，$\hat{V}=n^{-1}X'\hat{D}X$, と定義する．そうするといくつかの仮定のもとで，$\hat{V}$ は Vに強収束する．推定では，自由度を調整するため，$n/(n-k-1)$ を掛けることもある．様々な仮定のもとで，分布収束 $n^{1/2}V^{-1/2}M(b-\beta)\to N(0,I_k)$，も証明できる．さらに β に対する線型制約 $H_0: R\beta=\gamma$ が与えられたときラグランジュ乗数検定は $n(Rb-\gamma)'[R(X'X/n)^{-1}\hat{V}(X'X/n)^{-1}R']^{-1}(Rb-\gamma)$ となり，帰無仮説のもとで漸近的に自由度がRのランクに等しいカイ 2 乗分布になる．証明の難しさは行列 $\hat{D}$ の次元が n とともに増加することにある．

2.1.3 系列相関のある場合： 次に不均一分散のみならず系列相関も存在する場合の誤差共分散行列の一致推定法を解説しよう．(Newey and West [32])．(1.1) の代わりに $y_t=f(x_t,\beta)+u_t$，のような非線形回帰式の推定を考える．ただし β は未知母数の $p\times 1$ ベクトル，x_t は $(k+1)$ の行列で確率的であってもよいとする．$r\times 1(r\geq p)$ の操作変数ベクトルを w_t とし，各行が w_t' からなる $n\times r$ の操作変数行列をWとする．操作変数推定量は，$u'P_w u$ を最小にする $\hat{\beta}$ である．ただし $P_w=W(W'W)^{-1}W'$ である．

このようにして求められた $\hat{\beta}$ の漸近分布の共分散行列は，$D_t=\partial f(x_t,\beta)/\partial\beta$, D_t を列とする $p\times n$ 行列をDとし，$S_n=\Sigma_{1,n}\Sigma_{1,n}E\{u_t u_s w_t w_s'\}/n$，とすれば，

$$V=\mathrm{plim}_{n\to\infty}(D'P_W D/n)^{-1}D'W(W'W)^{-1}S_n(W'W)^{-1}W'D(D'P_W D/n)^{-1} \tag{2.4}$$

と与えられる．Vの一致推定量では S_n の推定に工夫が必要である．最も単純な推定量として，$\tilde{S}_n=\hat{\Omega}_0+\Sigma_{1,m}(\hat{\Omega}_j+\hat{\Omega}_j')$, $\hat{\Omega}_j=\sum_{j+1,n}\{\hat{u}_t\hat{u}_{t-j}w_t w_{t-j}'\}/n$ が考えられよう．$\tilde{S}_n$ はmを適当に選ぶことによって一致性を持つようにできるが，与えられた観測値総数に対しては非負定符号であるとはいえない．$\tilde{S}_n$ が非負定符号にならなければ共分散行列が非負定符号にならない可能性がで

てくるので，バートレットのウインドーを使った次の推定量が提案された．

$$\hat{S}_n=\hat{\Omega}_0+\sum_{j=1}^{m}w(j,m)(\hat{\Omega}_j+\hat{\Omega}_j'),\ w(j,m)=1-[j/(m+1)] \tag{2.5}$$

この推定量は非負定符号であり，誤差項に不均一分散のみならず自己相関が含まれていても，S_n の一致推定量になることが証明された．ただし m は標本の大きさ n の関数であって n とともに増加するが，その増加速度は $n^{1/4}$ より遅いとされる．実証上は観測値数が 100 なら 5 位におかれる．

線型回帰式(1.1)に以上の結果を応用すると，操作変数行列は説明変数行列に一致するから，最小2乗推定量の漸近共分散行列は $(X'X/n)^{-1}\hat{S}_n(X'X/n)^{-1}$ となる．$\hat{\Omega}_j$ の推定には最小2乗残差と説明変数ベクトルを用いればよい．また自由度を調整して，$n/(n-k-1)$ を掛けることもある．

2.1.4　ARCH：　経済分析における予測の誤差の大きさにはかなりの変動がみられる．しかも予測誤差は，大きい期間がしばらく続いた後小さい期間が続くというように，大小が継続して生じる傾向がある．ある期の誤差項が大きな値を示せば将来にわたり不確定性が増すのである．Engle [13] の ARCH (Auto Regressive Conditional Heteroscedasticity) モデルによれば誤差項のこのような変動を理解することができる．またある回帰式の残差が上記のような変動をする場合，回帰式から変数が欠落していたり経済構造に変化が起こっている可能性もあるが，ARCH はこのような想定上の誤りを検出しているとも考えられる．ARCH では，$\Psi_{t-1}=\{u_{t-i}, x_{t-j}\,;\ i\geq 1,\ j\geq 0\}$ を所与したとき，回帰式 (1.1) における誤差項の条件付き分布が，平均 0，分散

$$\sigma_t^2=\alpha_0+\alpha_1u_{t-1}^2+\cdots+\alpha_pu_{t-p}^2 \tag{2.6}$$

を持つとする．ただし，未知係数 α については $\alpha_0>0$, $\alpha_1\geq 0$, …, $\alpha_p\geq 0$ であるとする．説明変数 x_t にはラグ付き従属変数が含まれていてもよい．このような設定のもとで，誤差項の期待値は条件付き期待値をくり返し計算することにより 0 になる．誤差項の分散はやはり条件付き期待値を順次くり返して計算すれば，$1-\Sigma_{i=1,p}\alpha_iz^i=0$ の全ての根が絶対値で 1 より大きいという条件のもとで $\alpha_0/(1-\Sigma_{i=1,p}\alpha_i)$ に収束する．さらに同様な計算により誤差項間の自己共分散も 0 になる．しかし誤差項はその条件付き分散が一期前の誤差項に依存することから理解できるように，互いに独立ではない．例えば，二つの誤差項の 2 乗の自己共分散は 0 でない．このような状況のもとで最小2乗残差を用いて DW 検定を行っても系列相関を見い出すことはできないだろうが，残差の 2 乗には有意な系列相関が見い出されるかもしれないのである．しかしながら，誤差項が独立には分布していないので最小2乗推定量は有効性は持ちえない．以下，ARCH の状況のもとでの推定及び検定法の解説を行う．ただし誤差項の条件付き分布は正規であると仮定する．

誤差項の条件付き分布に正規性を仮定しても，誤差項ベクトル $u=(u_1, \cdots, u_n)'$ の条件のない同時確率密度関数は正規分布に従わない．しかし，順次に条件付き密度を考えることにより同時密度は

$$f(u_1, \cdots, u_n)=f(u_n|\Psi_{n-1})f(u_{n-1}|\Psi_{n-2})\cdots f(u_1, \cdots, u_p) \tag{2.7}$$

とかけ，仮定よりこの式の右辺の各項は最終項を除いて全て平均 0，分散 $\sigma_t^2(t=2,\cdots,n)$ の正規分布の密度関数の積となる．したがって対数尤度関数は

$$\ln L \cong -\frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{1}{2}\ln \sigma_t^2+\frac{1}{2}\frac{u_t^2}{\sigma_t^2}\right) \tag{2.8}$$

で近似できる．ただし，$u_t=y_t-x_t\beta$ とする．いま $z_t=(1,\ u_{t-1}^2,\ \cdots,\ u_{t-p}^2)'$ とおくと，α と β のスコアは直交していて

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}=\sum_2^n \frac{1}{2\sigma_t^2}\left(\frac{u_t^2}{\sigma_t^2}-1\right)z_t \tag{2.9}$$

となる．情報行列の導出は困難だが，ヘッシアンの条件付き期待値を繰り返し計算すれば $(1/2n)\Sigma_t E(z_t z_t'/\sigma_t^2)$ となる．この関数形を用いて $\hat{I}=(1/2n)\Sigma_t(z_t z_t'/\sigma_t^2)$ が情報行列の一致推定量になることが証明された (Harvey [20]，p.222 を参照されたい)．正規分布の場合と同様に，スコアの2乗からも情報行列を導出できる．これらを使って未知母数 α の推定が行える．β に関するスコアおよび情報行列は複雑であるので示さないが，Gauss-Newton 法によって推定が可能である．

検定においては帰無仮説では α_0 が誤差項の均一分散になり，他の α 係数は全て 0 とおかれる．従って LM 検定統計量は最小 2 乗残差 e_t を用いて，$(e_t^2/\alpha_0)-1$ を要素とする列ベクトルを f とし，かつ e_t によって置き換えられた z_t' を行とする行列を Z とすれば，$\mathrm{LM}=(1/2)f'Z(Z'Z)^{-1}Z'f$，となる．従って，(2.1) およびそれに続く分析と同様に，帰無仮説 $\alpha_i=0(i=1,\ \cdots,\ p)$ の LM 検定は補助回帰式

$$e_t^2=\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i e_{t-i}^2+\text{error}, \tag{2.10}$$

の nR^2 と一致する．

2.2 混合検定

標準的回帰分析では，回帰モデル (1.1) の誤差項 u_t に次の 3 つの性質が仮定される．

1) u_t は正規分布に従う（この性質をNと略記する），
2) u_t の分散は均一である（この性質をHと略記する），
3) u_t は系列相関がない（この性質を I と略記する）．

既に 1 章において誤差項が I を満たすかどうかを検定する方法を説明したが，そこではあらかじめNとHは満たされると前提されていた．また 2.1 節においては誤差項がHを満たすかどうか検定する方法を説明したが，そこではあらかじめNと I は満たされると前提されていた．N の検定についても同様で，誤差項に関する正規性の検定でも，Hと I は満たされると前提した上で，Nを検定するのである．

Jarque and Bera [24] は，このような検定方法を「一方向検定」と呼び，一方向検定では検定される性質以外の仮定の妥当性に検定結果が強く依存することを指摘した．そして，検定に先立ってあらかじめ他の性質が仮定されるよりは，むしろ N, H, I の 3 つの仮定を同時に検定した方がよいという視点に立ちその手法を示した．以下この混合検定の説明をしよう．

2.2.1 尤度関数： いま，回帰式 (1.1) の説明変数行列Xは定数項を含むとし，さらにXは Amemiya [1] で与えられた正則条件を満たすものとする．また，(1.1) の誤差項は AR (p) すなわち，$u_t=\gamma_1 u_{t-1}+\cdots+\gamma_p u_{t-p}+\varepsilon_t$，に従い，$\varepsilon_t$ は標準乱数である．ここで ε_t の密度関数 $g(\varepsilon_t)$ は単峰で分布の裾は横軸に滑らかに漸近するピアソン型の分布族に属すると仮定しよう．つまり

$$(2.11)\qquad g(\varepsilon_t)=\exp[\Psi(\varepsilon_t)]/\int_{-\infty}^{\infty}\exp[\Psi(\varepsilon_t)]d\varepsilon_t,\qquad -\infty<\varepsilon_t<\infty,$$

$\Psi(x)=\int[(c_1-x)/(c_{0t}-c_1x+c_2x^2)]dx$ とする．c_1 は密度関数のモードである．また $E(\varepsilon_t^2)=c_{0t}/(1-3c_2)$ で，$c_1=c_2=0$ のとき $g(\varepsilon_t)$ は平均ゼロ，分散 c_{0t} の正規密度関数になる．ここで分散は不均一分散 $c_{0t}=\sigma^2+z_t'\alpha$ であるとしよう．ただし z_t は $q\times1$ の外生変数ベクトルで，2.1 節の正則条件を満たすものとする．$\alpha=0$ のとき分散は均一である．以上の条件のもとで対数尤度関数は次の式で与えられる．

$$(2.12)\qquad 1(c_1, c_2, \sigma^2, \alpha, \gamma)=-\sum_{t=1}^{n}\ln\left[\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Psi(\varepsilon_t)d\varepsilon_t\right]+\sum_{t=1}^{n}\Psi(\varepsilon_t),$$

ここで $\mu_j=\sum_{t=1}^{n}u_t^j/n$ は誤差項 u_t の標本積率，$f_t=(u_t^2/\mu_2)-1$ は不均一分散の要素でそのベクトルを f，$M_1=I_n-1(1'1)^{-1}1'$，r_j は誤差項 u_t の自己相関関数でそのベクトルを r，尖度を $b_1=\mu_3^2/\mu_2^3$，歪度を $b_2=\mu_4/\mu_2^2$，と定義すると，先に述べた 3 仮説のラグランジュ検定統計量は次のようになる．

$$(2.13)\qquad \begin{aligned}LM=&n[(b_1/6)+(1/24)(b_2-3)^2]+n[3\mu_1^2/(2\mu_2)-\mu_3\mu_1/\mu_2^2]\\&+(1/2)[f'Z(Z'M_1Z)^{-1}Z'f]+n(r'r),\end{aligned}$$

誤差項の系列相関がない場合 u_t は性質 I を持ち $u_t=\varepsilon_t$ であるが，このとき $c_1=c_2=0$ ならば $g(\varepsilon_t)$ が正規密度関数になるから性質Nを持ち，さらに $\alpha=0$ ならば ε_t の分散は均一であるから性質Hを持つことになる．

2.2.2　ラグランジュ乗数検定：　検定では帰無仮説「u_t が N, H, I の性質をすべて満たす」に対して対立仮説は「全ては満たされない」である．だから，帰無仮説を「$c_1=c_2=0$，$\alpha=0$，$\gamma=0$」と定式化できる．ベクトル α の次数は q，γの次数は p であるから H_0 の制約の数は全部で $(p+q+2)$ 個となり，従って検定統計量 LM は H_0 のもとで漸近的に自由度 $(p+q+2)$ のカイ 2 乗分布にしたがう．

誤差項 u_t を残差 e_t に置き換えても検定の漸近的特性は影響を受けない．回帰式 (1.1) が定数項を含んでいれば残差の総和は 0 となるから μ_1 は 0 になり，(2.13) の右辺第 2 項は消える．尖度 $b_1^{1/2}$，および歪度 b_2 は各々漸近的に，$b_1^{1/2}\sim N(0, 6/n)$，$b_2\sim N(3, 24/n)$ である．それゆえ u_t が性質Nを持つときには性質Hや I を持つかどうかに関係なく，(2.13) の右辺第 1 項は漸近的に自由度 2 のカイ 2 乗分布にしたがう統計量となり，u_t が性質Nを持つかどうかの検定統計量になる．この項を LM_N とおく．また，(2.13) 式の第 3 項は 2.1 節で示した不均一分散の検定統計量と同一である．これを LM_H とおく．さらに (2.13) の右辺第 4 項目 $n(r'r)$ は，1 章で示した系列相関の風呂敷検定統計量である．これを LM_I とおく．以上のことから，検定統計量 (2.13) は，性質N, I, H の一方向検定統計量の和となっていることがわかる．このような混合検定と特定の一方向検定の差異はいうまでもなく検定のサイズに現われる．

さらに，u_t に N, I, H のうちのいずれか一個の性質が前提されているときに残りの二性質を同時に検定する検定を「二方向検定」と呼び，それらの検定統計量が次のようになることを示すことができる．まず，u_t にNが仮定されているときに性質 I, H の有無を検定する場合は，$c_1=c_2=0$ と前提されたうえで $\alpha=0$ かつ $\gamma=0$ という帰無仮説が検定されることになり，検定統計量は $LM_{HI}=LM_H+LM_I$ となる．これは帰無仮説のもとで漸近的に自由度 $(q+p)$ のカイ 2 乗分布にしたがう．次に，u_t に I が前提されているときに性質 N, H を検定する場合は，$\gamma=0$ が前提されたうえで $\alpha=0$ かつ $c_1=c_2=0$ という帰無仮説が検定されることになり，検定統計量

は $LM_{NH}=LM_N+LM_H$ と与えられる．これは帰無仮説のもとで漸近的に自由度 $(2+q)$ のカイ2乗分布にしたがう．第三に，u_t にHが仮定されているときに性質 N, I を検定する場合は，$\alpha=0$ が前提されたうえで $c_1=c_2=0$ かつ $\gamma=0$ という帰無仮説が検定されることになり，その場合の検討統計量は $LM_{HI}=LM_H+LM_I$ と与えられる．これは帰無仮説のもとで漸近的に自由度 $(2+p)$ のカイ2乗分布にしたがう．

2.3 RESET 検定

Ramsey [37] によって提案された RESET 検定（Regression Equation Specification Error Test）は，対立仮説を特定せずに回帰モデルの関数形が正しいかどうか調べるための検定である．後に検定法は Ramsey and Schmidt [38] によって簡略された．要領良い解説は Godfrey [18] にも見られる．回帰モデル（1.1）において，与えられた観測値の行列Xは非確率でランクは $k+1$ であり，その誤差項ベクトル u は平均が 0 で共分散行列 σ^2I の多変量正規分布に従うと仮定される．しかし実際には，真のモデルが行列X以外の説明変数を含んでいたり，説明変数がXの非線形関数になっていたり，あるいは説明変数が誤差項と独立でない様な場合が考えられよう．RESET 検定は，真のモデルにこのような可能性があるときに，(1.1)を採用してよいかどうか調べるための検定法である．

2.3.1 BLUS 残差：　この検定では最小2乗残差に代わりに BLUS 残差が用いられるので，まず BLUS 残差について説明を与えておく．u の最小2乗残差のベクトル e は，$e=M_Xu$ で計算される．独立正規性のもとで，e は平均がゼロで共分散行列が σ^2M_X の多変量正規分布に従う．ところで M_X は対角行列ではなく，対角要素も同一でない．すなわち，残差 e は互いに相関を持ち分散も一定しないのである．さらに回帰モデル（1.1）の行列Xのランクは $k+1$ だから，互いに独立な残差はたかだか $n-k-1$ 個しかない．Theil [43]は，このような性質を持つ最小2乗残差 e の代わりとして，平均がゼロで共分散行列が σ^2I の形になる BLUS 残差を提案した(Harvey [20])．BLUS 残差 e_B は次のように計算される．まず M_X はベキ等だから $P'M_XP=\mathrm{diag}(I_{n-k-1}, 0)$ を満たす固有ベクトルからなる行列Pがある．このP行列の最初の $n-k-1$ 列を P_1 と記せば BLUS 残差は $e_B=P_1'y$ と求められ，その次数は $n-k-1$ となる．また $M_XX=0$，$P_1'X=0$，$P_1'P_1=I_{n-k-1}$ だから，BLUS 残差の分布は $N(0, \sigma^2I_{n-k-1})$ となる．

2.3.2 RESET 検定：　$\hat{y}^{j+1}$ を(1.1)の被説明変数の予測値の $j+1$ 乗からなる $n\times 1$ のベクトル，さらに $Q=P_1'\hat{Y}$，$\hat{Y}=(\hat{y}^2, \cdots, \hat{y}^{c+1})$ と定義しよう．このように定義されたQは定数項および $\hat{y}$ と直交する．対立仮説 H_1 のもとでは特定化の誤りがあるため，RESET 検定では(1.1)の BLUS 残差ベクトル e_B の平均が未知母数を用いて $Q\alpha$ で近似できるとされる．RESET 検定を行う手順は次の通りである．先ず，モデル（1.1）の説明変数行列Xから行列 P_1 を計算し，その P_1 と被説明変数ベクトル y から BLUS 残差 e_B を計算する．次に回帰式(1.1)を最小2乗推定して被説明変数の予測値 $\hat{y}$ を計算しQを求める．さらに次の様な定数項のない回帰式をたてる．

$$e_B=Q\alpha+\varepsilon \tag{2.14}$$

ここで ε は，分布が帰無仮説 H_0 のもとでの e_B の分布に等しい誤差項である．もしc個の係数がすべてゼロに等しければ BLUS 残差の分布は同一になるが，これは帰無仮説が支持されることを意味する．ゆえに RESET 検定はc個の係数がすべてゼロであるという仮説のF検定に帰着でき，検定統計量は帰無仮説のもとで自由度 $c, n-k-1-c$ のF分布にしたがう（A 型 RESET 検定）．なお，(2.14)において必要とされる $\hat{y}$ のベキの次数については一般的な規則はない．しかし経験的に3位で十分であるといわれる．

2.3.3 修正 RESET 検定：ところでこのF検定統計量は

(2.15) $$F=\frac{n-k-1-c}{c}\frac{e_B'e_B-e_B'M_Qe_B}{e_B'M_Qe_B},$$

である．ここで $P_1P_1'=M_X$ を利用して $e_B'e_B$ および $e_B'M_Qe_B$ の表現を変えれば，このF検定統計量は回帰式 $e=X\beta+\hat{Y}\alpha+\mathrm{error}$ における α のF検定統計量と同値になる．残差は説明変数Xと直交しているから，このF検定は補助回帰式

(2.16) $$y=X\beta+\hat{Y}\alpha+u$$

における c 個の α 係数の有意性検定と同値になる．F検定統計量は帰無仮説のもとで自由度 c, $n-k-c-1$ のF分布に従う．P_1' を (2.16) 式に掛ければ (2.14) 式になることはいうまでもない．この検定法を修正 RESET 検定とよぶ．LM 検定統計量は(2.16)に M_X を掛けて，nR^2 を求めればよい．

RESET 検定は誤差分散の不均一性の検定にも用いられるが，その場合は回帰式 $e=\hat{Y}\alpha+\mathrm{error}$，における係数の有意性が問題となる．被説明変数を残差の2乗とする検定も可能である．

3章　非定常時系列

3.1　単位根の検定

3.1.1　トレンド・モデル：　経済分析において重要な非定常時系列の第一は外生トレンド・モデルである．外生トレンド・モデルは $y_t=(\mu+\beta t)+u_t$ だが，誤差項が p 次の系列相関をもつならば，ラグ多項式 $\phi(L)$ と標準乱数 ε_t を使い $u_t=\varepsilon_t/\phi(L)$ と書けるから，

(3.1) $$\phi(L)\{y_t-(\mu+\beta t)\}=\varepsilon_t$$

と変形できる．平均は時間 t の簡単な関数 $\mu_t=\mu+\beta_t$ で定義される．平均が変化するから系列は非定常である．ラグ多項式の全ての根は1より大で定常性を満たすとする．外生トレンド・モデルは，外から与えられた外生トレンド μ_t の周辺で不規則に変動する定常過程として定義される．トレンドからの誤差は定常だから，過去の変動の影響は時間とともに消滅する．(3.1)式において平均 μ_t が不変であっても，多項式 $\phi(L)$ の根が1より小となる場合（発散過程）や根が1に等しくなる単位根の場合はやはり非定常過程である．発散過程は，データをグラフ化すれば視覚的に判定しやすい．また経済分析で扱われる時系列で発散過程を示す系列は，対数変換によって定常過程か和分過程に変換できるといわれる．逆に，－1の根は現実性が乏しいものの，1の単位根を含む時系列は頻繁に出現しうる．ところが，様々な実験で示されているのだが，根が1の場合は視覚的に定常過程と差異がない場合があるため，非定常であるとの直観的判定が困難であるとされる．このような時系列属性の区別は，そのデータが回帰分析に利用される際に問題となってくるが，単位根のある系列を特に確率的トレンド・モデルあるいは階差モデルとよぶ．

3.1.2　階差モデル：　確率的なトレンド・モデルは，$y_t=y_{t-1}+u_t$，つまり乱歩（ランダム・ウォーク）で定義される．このモデルでは，右辺のラグ付き被説明変数を逐次置き換えれば，$y_t=\Sigma_iu_i$，となる．非確率モデルでのトレンド項は定数 β の総和 βt だが，確率モデルでのトレンド項は誤差項の総和であり，誤差項が標準乱数の際はその誤差分散は時間に正比例して増加する．時系列が誤差項の和で定義されるから和分過程とよばれる．和分過程では観測期間がいくら大きくなっても初期の誤差項が y_t に残ってくる．その意味で和分過程では時間を経ても記憶が消滅しない．もし乱歩の誤差項が自己回帰過程で表現できるなら $u_t=\varepsilon_t/\phi(L)$ となり，ラグ多項式

を両辺に掛ければ

$$(3.2)\qquad \phi(L)\Delta y_t=\varepsilon_t$$

となる．この表現は (3.1) に対応している．これに対してドリフト（趨勢と訳される，山本拓 [45] p.233）をもつ乱歩は

$$(3.3)\qquad y_t=\mu+y_{t-1}+\varepsilon_t$$

である．このモデルでは，過去の時系列を所与とすれば固定分の変化が必ずあり，その上に不特定な標準乱数分の変化が追加される．右辺の y を逐次置き換えれば，y_t は $(t\mu+\Sigma\varepsilon_t)$ となる．外生トレンドが含まれる事は明らかであろう．したがって外生トレンド・モデルと確率的トレンド・モデルの比較としては，ドリフトのある乱歩が扱われるべきで，Schmidt [40] のように外生トレンドのある乱歩を考えることには無理があるように思える．外生トレンドの周辺での変動が定常か非定常かという問題は，(3.1) と，ドリフトのある乱歩 (3.3) あるいは $\phi(L)\Delta y_{t-1}=\mu+\varepsilon_t$，の比較に帰着する．ドリフトのある和分過程ではトレンドの周囲での変動は決して小さくならず，トレンドからの誤差の分散は無限に発散する．m 次の階差が定常になる和分過程を $I(m)$ と記すが，乱歩は $I(1)$ である．定常な部分に単位根が d 個付随している確率過程は，階差を d 回とった $\Delta^d y_t$ に関して定常になる．ドリフトがある場合は

$$(3.4)\qquad \phi(L)\Delta^d y_t=\mu+\varepsilon_t$$

となる．y に関して (3.4) を解けば，d 次の多項式トレンドが導出される．

3.1.3　単位根の検定：　マクロ経済学では外生トレンド・モデルと確率的トレンド・モデル（階差モデル）の意味合いは大きく異なっており，その違いについて様々な議論がある．(山本[45]，12 章，また本章全体にわたっては畠中 [22] を参照されたい)．計量分析における直裁的な差異は，外生トレンド・モデルでは予測の精度はモデルの作成者に責任が帰するが，確率的トレンドモデルでは予測の精度はモデルの作成者に責任が帰さないところにあるともいえよう．この節では，二つのモデルの選択に関する検定を概説しよう．(3.1) と (3.2) 式より外生トレンド・モデルと確率的トレンド・モデルの差異は

$$(3.5)\qquad \phi(L)(1-\rho L)\{y_t-(\mu+\beta t)\}=\varepsilon_t$$

における係数 ρ, β, μ に集約できよう．誤差項は $Nid(0, \sigma^2)$ である．係数 ρ が $1, \beta=0$，ならば確率的トレンド・モデル，係数 ρ が 1 より小で $\beta\neq0$ なら外生トレンド・モデルとなる．

特定の変数が和分過程であるかどうかを統計学的に検定する方法を最初に示したのは Dickey and Fuller [8] である．真の確率過程を和分過程だとする．この和分過程を誤って定常な自己回帰過程と理解して最小 2 乗推定すると，ϕ の推定量に様々な問題が含まれることがわかった．つまり，決定係数や t 値のような統計量が通常の分布に従わなくなり，そこに最小 2 乗法の常套的な解釈を適用すると誤った推測結果がもたらされるのである．このために単位根を検出することは，実証研究上大きな意味合いをもってくる．以下，H_0:$\rho=1$，および，H_a: $|\rho|<1$ の検定を分類する．ただし ε_t は分布を特定しない標準乱数とする．$\phi(L)$ が 1 の場合は総じて Dicky-Fuller (DF) 検定と呼ばれる．以下 a)，b)，c) は $\phi(L)=1$ の DF 検定で，まず対立仮説を述べる．帰無仮説は d) を除いて，全ての場合について $\rho=1$，$\beta=0$ つまり乱歩，$y_t=y_{t-1}+\varepsilon_t$ である．また ρ が 1 なら定数項 μ は消えることに注意されたい．分布表は Fuller [15] および DF [9] や山本 [45] に掲載されている．

a)　H_a のもとで $\mu=0$，$\beta=0$，$\rho<1$ の場合，(3.5) 式を変型すれば $y_t=\rho y_{t-1}+\varepsilon_t$ となる．

ρ の最小2乗推定量を t 値型に変換して検定を行う. $H_0:\rho=1$ である. t 値は $\hat{\tau}$ 表を使って検定する. $\hat{\tau}$ の分布は t 分布を負の方向にずらした形となる. 棄却域は負の据にある.

b) H_a のもとで $\mu\neq 0$, $\beta=0$, $\rho<1$ の場合, (3.5) 式を変型すれば $y_t=\alpha+\rho y_{t-1}+\varepsilon_t$ となる. 対立仮説のもとで定数項が含まれる. したがって $H_0:\alpha=0$, $\rho=1$ と書ける. この式を最小2乗推定し, ρ の t 値により $\rho=1$ の検定を $\hat{\tau}_\mu$ 表を用いて行う. $\hat{\tau}_\mu$ の分布は $\hat{\tau}$ の分布をさらに負の方向にずらした形状をとる. 棄却域は負の据である. $\alpha=0$ の検定は $\hat{\tau}_{\alpha\mu}$ 表を使う. α と ρ の両母数に関する尤度比検定は Φ_1 表を使う.

c) H_a のもとで $\mu\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\rho<1$ の場合, (3.5)式を変型すれば $y_t=\alpha+\beta' t+\rho y_{t-1}+\varepsilon_t$ となる. 対立仮説のもとでトレンド項と定数項が含まれる. したがって $H_0:\alpha=0$, $\beta'=0$, $\rho=1$ と書ける. この式を最小2乗推定し, ρ の t 値により $\hat{\tau}_\tau$ 表を用いて $\rho=1$ の検定を行う. $\hat{\tau}_\tau$ 分布は $\hat{\tau}_\mu$ の分布をさらに負の方向にずらした形となる. 棄却域は負の据である. α と β' に関する t 検定は, 各々 $\hat{\tau}_{\alpha\tau}$ 表と $\hat{\tau}_{\beta\tau}$ 表を用いる. α, β', ρ の尤度比検定は Φ_2 表を使う.

d) 帰無仮説の下で特に α に制約を課さない場合, $H_0:\beta'=0$, $\rho=1$ の尤度比検定は Φ_3 表を使う. $\rho=1$ の検定は $\hat{\tau}_\tau$ を用いる.

e) $\Phi(L)$ が1でない一般のラグ多項式の場合, 検定は拡張DF (ADF) 検定と呼ばれる. ドリフトとトレンドが含まれるなら, (3.5) 式を書き直して

$$y_t=\mu+\beta_t+r_1 y_{t-1}+\cdots+r_p y_{t-p}+\varepsilon_t \tag{3.6}$$

となる. 誤差項は標準乱数である. もし自己回帰式が単位根をもつならば (3.5) に含まれるラグ多項式より, $1=r_1+\cdots+r_p$ となる. ここで(3.6)を関係式 $y_{t-i}=-\Delta y_{t-i+1}-\cdots-\Delta y_{t-1}+y_{t-1}$ を用いて変換すると

$$y_t=\alpha+\beta t+\rho y_{t-1}+\alpha_1\Delta y_{t-1}+\cdots+\alpha_p\Delta y_{t-p}+\varepsilon_t \tag{3.7}$$

と書けるが, 特に $\rho=r_1+\cdots+r_p$ であり帰無仮説のもとで ρ は1になる. (ラグ多項式 $\phi(L)$ のテイラー展開によってこの変換を求めると, ρ は $\phi(0)$, α_j は j 次導関数 $\phi^{(j)}(1)$ になる事がわかる.) 単位根の検定は (3.7) 式を最小2乗推定して求まる ρ の t 値を, $\hat{\tau}_\tau$ 表を用いて検定すればよい. t 統計量の帰無仮説のもとでの確率的構造は $\phi(L)$ が1の場合と変わりない. 対立仮説のもとでトレンド項がない場合は $\hat{\tau}_\mu$ 表を使い, トレンド項もドリフト項もない場合は $\hat{\tau}$ 表を使って検定を行う. 要するに, ラグ付き階差変数の係数は標準的に検定でき, α, β, そして ρ は a), b), c), d) に基づいて検定すればよい.

Nelson and Plosser [31] は米国の主要マクロ経済指標の年次データについてADF検定をおこない,「失業率以外の全てのマクロ経済データは乱歩であるとの仮説を棄却できない」との結果をえた.

3.1.4 応用の手順: 検定作業上の手続きとしては, ラグ多項式 $\phi(L)$ をもつ階差モデルとかトレンド・モデルを検定の当初から定式化するのではなく, トレンドと定数項を含む過程,

$$y_t=\mu+\beta_t+\phi y_{t-1}+u_t \tag{3.8}$$

において, 誤差項 u_t の自己回帰モデルを選び出すという作業を行う. この作業はまさに第1章で解説した誤差項の自己回帰モデルを選択する方法を使えばよい. つまり最小2乗残差を用いた補助回帰式により, 自己回帰式の次数を判定するのである. 例えば u_t が2次の自己回帰過程に従うと判断されたとすると, $(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)u_t=\varepsilon_t$ であるから, 誤差項 u_t は $u_t=\varepsilon_t/(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)$ と表現できる. ここでラグ多項式 $(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)$ を (3.8) の両辺に掛け共通因子の制約 (COMFAC) を除けば, 結果的に (3.6) あるいは (3.7) 式が導かれる. ラグ多項式

の次数が未知でその値を試行錯誤で決める場合は，(3.7) 式を最小2乗推定して，最終項の有意性を t 検定すればよい．この検定は ϕ の値とは独立であるから単位根には影響されない．かつ次数を順次減らしていくならば個々の検定は独立になるから，プリテストの偏りも生じない (Anderson [2], 6.4)．誤差項が ARMA 過程の際は，ARMA 過程を AR 過程で近似すると考えて分析を一般化できよう．他方，誤差項の自己相関に関する回帰診断を行うのなら，自己相関と同様に不均一分散など他の回帰診断も検討されなければならない．実際 ADF の次数を決める際に，2.1 節による標準誤差の計算，特に White 法に基づいてラグ付き階差変数の t 値が求められるべきであろう．要するに (3.7) 式も十分な回帰診断の末推定されるべきだと要約できる．

系列相関の次数 p が既知であるとすれば ADF，あるいは p が 0 の場合 DF 検定手順は以下のようになる．回帰式，$y_t=\alpha+\beta' t+\rho y_{t-1}+\varepsilon_t$ を基準として説明する．

i) 定数項およびトレンドの項の入った回帰式において単位根を $\hat{\tau}_\tau$ を使って検定する．もし帰無仮説が棄却されれば検定は終了する．

ii) 棄却できない場合は c)，d) で述べたように $\beta'=0$，$\rho=1$ であるが，回帰式の特定化を調べるために，$\hat{\tau}_{\beta\tau}$ の表を用いて $\beta'=0$ を検定する．

iii) もし β' が有意であれば，c) の回帰式中 $\rho=1$ の t 検定を標準正規を帰無分布として行う．仮説は，$\beta'\neq 0$ のもとで $H_0{:}\rho=1$，$H_a{:}\rho<1$ である．トレンド変数が有意であれば漸近正規検定が使える (DF [8])．α は $\hat{\tau}_\tau$ の分布に妨害母数 (nuisance parameter) として入らない．

iv) もし β' が有意でなければ b) を行う．$\hat{\tau}_\mu$ が有意であれば検定は終了する．

v) $\hat{\tau}_\mu$ が有意でないなら，帰無仮説は $\alpha=0$，$\rho=1$ だから回帰式の特定化の検定を $\alpha=0$ について行う．$\hat{\tau}_{\alpha\mu}$ 表を用いる．

vi) もし α が有意であれば $\rho=1$ の t 検定を標準正規分布を帰無分布として行う．仮説は $\alpha\neq 0$ のもとで $H_0{:}\rho=1$，$H_a{:}\rho<1$ である．ドリフト項が有意であるので漸近正規検定が使える (DF [8])．この場合は α が妨害母数になり分布が α に依存している．詳細な小標本分布は Schmidt [40] が与える．

vii) もし α が有意でないなら，a) を行う．

以上の手順は複雑であるし，Φ 型の検定を考えればより複雑になる．式の特定化が心配ないなら i)，iv)，vii) のみ，あるいはそのうちの一つのみを検討すればよい．y_t の回帰式に入っている定数項あるいはトレンド項が有意ならば，和分過程によって生じる非定常性の影響は打ち消され t 値の帰無分布は漸近正規になる事にも注意されたい．

現在では実証分析に先立って，DF 検定や ADF 検定により変数の定常性を検討することが一般に望ましいとされる．もっともこれらの検定に問題が無いわけではない．まず検出力に問題があり，真の確率過程が定常過程であっても，ρ の値が1に近くサンプル数も少ないと DF 検定はこれを和分過程であると誤認してしまうことが多い．さらに，帰無仮説は和分過程であり，対立仮説が定常過程である事にも十分配慮されるべきであろう．多くの経済時系列が単位根をもつと判定されているが，正確には「単位根をもつ」という帰無仮説が棄却できないだけなのである．DF 検定や ADF 検定の結果もこの点に注意して解釈されないといけない．最も重要な点は，応用上は単位根の検定手順は自己回帰式に関する回帰診断の手続きを経て行われるべきであろうが，理論的には誤差項の自己回帰の次数 p が既知でないと検出力が著しく損なわれる事にある．実際上 p は既知であるはずがなく，p を大きめにとって検定を始めれば検出力が損なわれ，また p を小さくすると検定の偏りが生じる．いずれにしろ p の判定は極度に難しい．

Phillips and Perron [36] は独立性の仮定を除いた修正検定 (Z 検定) を提案し分布表を作

成した．展望論文として山本［45］およびDolado他［10］を参照されたい．

3.2　誤差修正モデル

3.2.1　自己回帰分布ラグモデル：　動学モデルの推定では，まず経済理論にしたがってモデルに必要な経済変数が選択され，ラグ構造に関する情報をデータから引き出すため，被説明変数と説明変数双方につき十分な次数のラグ項を含めた次のようなモデルが推定される．

$$A(L)y_t=\sum_{i=1}^{k}B_i(L)x_{ti}+\varepsilon_t \tag{3.9}$$

ここで $A(L)$ は r 次，$B_i(L)$，はそれぞれ s_i 次のラグ多項式である．(3.9)は「自己回帰分布ラグモデル」(Auto-regressive Distributed-lag モデル，ADM）とよばれる．そして，推定されたモデルからラグ項のうち有意でないものを落としてモデルを簡略なものに変形していき，また残差項 u_t が系列相関を持たないよう，かつ不均一分散を示さないよう各変数のラグ次数を決定する．繰り返すが，COMFAC の項で説明したように u_t がたとえば 2 次の自己回帰を示すなら，各変数のラグ次数を 2 次高めることにより自己相関を除去できる．四半期データの場合，重要な説明が不足してさえいなければ，経験的にラグの次数は高々 5 ほどで十分であるといわれている．

3.2.2　誤差修正モデル：　簡単化のため，(3.9)において変数が x と y の 2 個の場合を考える．各変数について，資本ストック額は初期の資本ストック額に 2 時点間の投資額を加えたものといった意味をもつ変換，$x_{t-j}=\Delta x_{t-j}+\cdots+\Delta x_{t-s+1}+x_{t-s}$，を利用してラグ差分ごとにまとめると，(3.9) は次のように書き換えることができる．

$$\Delta y_t=\sum_{j=1}^{s-1}\alpha'_j\Delta y_{t-j}+\sum_{j=0}^{s-1}\beta'_j\Delta x_{t-j}-(\alpha y_{t-s}-\beta x_{t-s})+\varepsilon_t, \tag{3.10}$$

このようなモデルは ECM（誤差修正モデル）と呼ばれ，(3.10) の括弧内の項は「誤差修正項」と呼ばれる．(3.9)から ECM への書換えは常に可能である．ECM の誤差修正項に含まれている変数はすべて同時点におけるものであるから，誤差修正項は当該変数間の長期的均衡関係を示す．一方 ECM の説明変数のうち，階差変数は短期的動学関係を示す．だから ECM では経済変数間の短期的反応と長期的均衡関係が分離され，s 期前の均衡からのはずれと，その後の短期的調整が示されている．逆に ADM ではこの分離が行われていない．また ECM は先と同様の変換 $x_{t-j}=x_{t-1}-\Delta x_{t-1}-\cdots-\Delta x_{t-j+1}$ により，$\Delta y_t=\Sigma_{1,r-1}\alpha_j^*\Delta y_{t-j}+\Sigma_{0,s-1}\beta_j^*\Delta x_{t-j}-(\alpha y_{t-1}-\beta x_{t-1})+\varepsilon_t$ とも表現しうる．時点は異なるものの長期的均衡式は (3.10) と同一である．

吉田［46］にあげられた例を示そう．経済理論の教科書でよく使われる通貨需要関数は，M を通貨需要，P を物価指数，Y を実質所得，R を利子率として，$(M/P)=f(Y/P,R)$，のように表される．関数に対数線形性を仮定し，$m=\ln(M/P)$, $p=\ln P$, $y=\ln(Y/P)$ と定義すると，ADM は次のようになる．

$$m_t=\alpha_0+\beta_1 m_{t-1}+\cdots+\beta_n m_{t-n}+\gamma_0 y_t+\cdots+\gamma_m y_{t-m}+\delta_0 R_t+\cdots+\delta_k R_{t-k}+u_t \tag{3.11}$$

この ADM は経済理論のモデルとしては意味を持たない．また，同じ説明変数のラグ間では相関が非常に高いことから多重共線性の問題が起こり，係数の正確な推定は不可能である．ここで (3.11) を簡略化しよう．すなわち $n=1$ とし，R をモデルから除外する．また係数の定義も変更すると，(3.11) は

$$m_t=\alpha m_{t-1}+\beta y_t+\gamma y_{t-1}+u_t \tag{3.12}$$

のように書くことができる．さて，ADM (3.12) の両辺から m_{t-1} を引いて整理すると

$$\Delta m_t = c_1 \Delta y_t + c_2(m-ky)_{t-1} + u_t \tag{3.13}$$

という簡単な ECM が得られる．(3.12) と (3.13) は α，β，γ の 3 つの係数から c_1，c_2，k の 3 つの係数への同値変換であり，従って ADM (3.12) と ECM (3.13) とは同値である．しかし ADM に比べて，ECM には次の 3 つの利点がある．

第 1 に，ECM は ADM と異なり経済理論と整合的な解釈が可能である．ECM 型の通貨需要関数 (3.13) では，通貨保有に対する行動様式は次のように理解される．まず，通貨保有量 m と実質所得 y との間には，均衡状態において $m=ky$ なる関係が成り立つ．しかし，現実にはこのような関係は不確実性や調整コストなどの理由から必ずしも毎期々実現していない．そして ECM (3.13) は，人々が均衡状態を実現しようとして各期において通貨保有量の変化分 Δm_t を調整する場合，その調整が当該期の実質所得の変化 Δy_t と，前期における均衡状態からの乖離幅 $(m-ky)$ に反応して行われるということをモデル化したものである．ここで，前期における均衡状態からの乖離幅が今期で縮小するように修正されるためには $c_2<0$ となる必要がある．また，2 個の階差変数が 0 となった場合 $m=ky$ が成立するから，「長期均衡状態」が達成されたと見なすことができる．ECM では誤差修正項により，当該変数間に乖離を妨げる力が働いている点がモデルに反映されている．このため，モデルの説明力および予測精度が改良されるといわれる．

第 2 に，多重共線性の問題が改善される点である．例えば ADM (3.12) では，2 つの説明変数 y_t と y_{t-1} は同系列のため相関が高く，また説明変数 m_{t-1} も他の 2 つの説明変数との相関が高い．従って (3.12) をそのまま推定して α，β，γ の正確な推定値を得ることは不可能であろう．しかし ECM (3.13) では，階差変数と誤差修正項の間の相関は通常低いから，(3.13) 式の係数はより正確に推定できよう．

第 3 の利点については共和分の説明の後に述べる．

3.3 共　和　分

3.3.1 見せかけ回帰式：　2 つの無関係な乱歩変数相互の間で回帰を行った場合，「見せかけ回帰」(Spurious Regression) の問題が生じる．Granger and Newbold [19] は，人工的に創出された 2 つの独立な乱歩変数の間で回帰分析を行い，両者の間に統計的に有意な関係が検出されるかどうかを調べる実験を行ったが，あたかも両変数の間に有意な関係が存在するかのような結論を得た．これを見せかけ回帰とよぶ．Phillips [34] は見せかけ回帰の問題を数学的に解明し，次のような結論を導いた．すなわち，2 つの無関係な和分変数の間で回帰を行うと，1) 極限で t 値は発散し，両変数の関係は「有意」と判断される，2) 最小 2 乗推定量及び決定係数は確率変数に収束し，決定係数は両変数の関係を示す目安にならない，3) 極限で DW 比は 0 に収束する．

以上より，和分と疑わしい経済変数相互の回帰式において DW 比が極端に低い場合，そして CO 法により DW 比が上方修正される場合は，その結果を鵜呑みにせず，見せかけ回帰の可能性に十分配慮すべきであろう．ちなみに DW 比が決定係数よりも低い回帰式は要注意であるといわれている．

3.3.2 共和分と表現定理：　この節では Engle and Granger [14] に基づいて共和分の概念と共和分のもとでの VAR (ベクトル自己回帰モデル) の誤差修正モデルへの変換，さらに推定法を説明しよう．たとえば (3.12) 式において，m と y が共に 1 次の和分過程であるとすると，見せかけ回帰の条件がそろう．つぎに (3.13) 式を検討すると，差分変数は $I(0)$ だから，もし $(m-ky)$ もともに $I(0)$ なら見せかけ回帰は生じない．はたしてこのような関係は可能なのであ

ろうか．この疑問に答えたのが「共和分」であった．要するに共和分とは，「和分過程」と「和分過程」の一次結合が，「定常過程」になることを意味する．つまり複数の和分過程が共に変動するために，一次結合が定常になりうるのである．さらに共和分が存在すれば，(3.13)式は整合的である．つまり ADM (3.12) より ECM (3.13) が導かれるのである．一般的には複数の $I(d)$ 変数間に，和分次数を下げる複数の線型関係が存在しうる．定義を述べよう．**定義**：m個の変数からなる列ベクトル x_t があり，各要素が $I(d)$ であるとする．もし，$z_t=\beta' x_t \sim I(d-b)$, $b>0$，となるような行列 β' が存在すれば，x_t はd，b の次数で共和分しているといわれ，$x_t\sim CI(d, b)$，と表記される．β は共和分行列とよばれる．

3.3.3　表現定理：　変数間に共和分が存在すればECM表現が導出できる．以下導出のあらすじを与える．m次元ベクトル x_t が $I(1)$ で共和分をもち，$r\times m$ 行列 β' が共和分行列だとすると $\beta' x_t$ は $I(0)$ となる．他方 $\varDelta x_t$ は定常だから，Woldの分解定理によりMA表現が可能で，$C(L)$ を行列ラグ多項式とすれば，$\varDelta x_t=C(L)\varepsilon_t$，と書ける．ラグ変数は3.2節で示したように $\varepsilon_{t-j}=\varepsilon_{t-1}-\varDelta\varepsilon_{t-1}-\cdots-\varDelta\varepsilon_{t-j+1}$ と展開できるから，新たな多項式 $C^*(L)$ を使って $C(L)=C(1)+\varDelta C^*(L)$，と書き直す．この展開を使えば，$x_t=C(1)\varepsilon_t/\varDelta+C^*(L)\varepsilon_t$ と表現できるが，この第1項は非定常，第2項は定常である．ここで β' を x_t に掛けると，左辺は定常だから $\beta' C(1)=0$ が満たされないといけない．だから，β' は $C(1)$ の直交補空間全体を張る．ここで論文中のレンマを使う：多項式 $C(L)$ に対して $A(L)C(L)=\varDelta g(L)I_m$ を満たす行列ラグ多項式 $A(L)$ とスカラーのラグ多項式 $g(L)$ が存在する．このレンマの目的は $C(L)$ の逆行列を探して，$\varDelta x_t$ のMA表現をAR表現に変えることにある．このレンマ中 $A(L)=A(1)+\varDelta A^*(L)$ と展開して $C(L)=C(1)+\varDelta C^*(L)$ と掛け合わせると，$\varDelta$ の次数のつり合いのため $A(1)C(1)=0$ にならないといけない．従って $A(1)$ はやはり $C(1)$ の直交補空間を張る．この結果と $\beta' C(1)=0$ を合わせて，さらにランクを考慮すれば $m\times r$ の調整行列 α が存在して，$A(1)=\alpha\beta'$ と分解できる事がわかる．このようにして多項式 $A(L)$ の性質が分かればAR表現を求めるため，$A(L)$ を $\varDelta x_t=C(L)\varepsilon_t$ に掛ける．レンマにより $A(L)\varDelta x_t=\varDelta g(L)\varepsilon_t$，あるいは $\varDelta$ で割って $A(L)x_t=g(L)\varepsilon_t$ とAR表現が求まる．ここで，$A(L)$ を展開すると，$\alpha\beta' x_t+A^*(L)\varDelta x_t=g(L)\varepsilon_t$ となり，共和分項の一期ラグをとればECM表現が導出される．$\beta' x_t$ は条件により定常である．

一点の注意を与えるとすると，前節のECMは一変数の回帰式におけるADMの変型として与えられたが，この節ではVARの変換としてECMが定義されている．従って，ADMより導かれたECMでは左辺と同期の階差変数が右辺に含まれるが，この節のECMでは左辺と同期の階差変数は右辺に含まれない．さらにADMではみせかけ回帰が生じるが，Sims, Stock, and Watson [41] が示したようにVARでは和分変数が含まれても最小2乗推定量は一致性を保ち，VARより導かれたECMは共和分の存在にかかわらず最小2乗法により一致推定が可能である．第2の注意点としては，誤差修正項は長期均衡からの乖離を意味すると解釈されるが，複数の共和分がある際には識別が不可能であるために，実証上は均衡式を判別できない事があげられよう．つまり任意の正則行列Qに対して $A(1)=\alpha Q^{-1}(Q\beta')$ だから，$Q\beta'$ も共和分行列になる．だからある誤差修正関係の正則な線型変換は全て誤差修正関係であり，特定の経済的な意味をもつ長期的な均衡式を見いだすことはむしろ恣意的な判断にすぎないといえよう．

3.3.4　2段階推定：　2変数 x_t，y_t が共和分で，d と b が1，かつ $(1, -k)$ が共和分ベクトルの場合には，x_t，y_t の間には次のようなECMが成立する．

$$\varDelta x_t=\alpha_1(y_{t-1}-kx_{t-1})+A(L)\varDelta x_{t-1}+B(L)\varDelta y_{t-1}+e_{1t} \tag{3.14}$$

$$\varDelta y_t=\alpha_2(y_{t-1}-kx_{t-1})+C(L)\varDelta x_{t-1}+D(L)\varDelta y_{t-1}+e_{2t} \tag{3.15}$$

ここで $A(L)$ などは有限次のラグ多項式であり，係数 α_1, α_2 は両方同時に0になることはない．

ラグ変数により誤差項から系列相関は除去されていて，誤差項は標準乱数の条件を満たすとする．さらに上述のようなECMが成立するには，x_t，y_t，は共和分でないといけない．ところで，2つの独立な$I(1)$変数相互の間で回帰を行うと，両変数の間に「見せかけ回帰」が発生する．ところが，上の(3.14)，(3.15)におけるように2つの$I(1)$変数x_t，y_tが共和分ならば，y_tのx_tへの回帰の最小2乗推定値はkの一致推定量になる．しかも，標本の大きさをnとすると，共和分ベクトルの最小2乗推定値がその真の値に収束するスピードはn^{-1}であり，定常な変数どうしの最小2乗推定値が真の値に収束するスピード$n^{-1/2}$よりも早い．共和分ベクトルの最小2乗推定値のもつこの好ましい性質は，超一致性（Stock [42]）と呼ばれている．2段階推定法ではこの超一致性が利用される．つまり，まず均衡式は最小2乗推定値$\hat{k}$により推定する．次に誤差修正項を残差として求め，この「共和分」残差を（3.14)，(3.15）に代入して最小2乗推定を実行するわけである．もし2変数間に共和分が存在すれば，超一致性により共和分残差は定常になる．最小2乗法は多次元の共和分でも一致性を保持する．

共和分残差の定常性は，共和分残差に対して，単位根の検定を行って検討すればよいとされる．しかしながら，この検定には注意を払わないといけない．まず検定の帰無仮説は「共和分が無い」であり，帰無仮説が棄却されて初めて共和分関係が有意になる．したがって検定統計量は帰無仮説「共和分は無い」のもとで構築されないといけない．ところがこの帰無仮説のもとでは共和分係数の推定に問題が生じる．なぜなら共和分がなければ誤差調整項は見せかけ回帰になってしまうからである．したがって係数kの推定が難しい．そこで検定統計量はDFやADFに基づきながら，これらの検定統計量の分布は「共和分はない」という仮説の下で実験により求められ，そして検定の臨界値は数値的に導出されたのである．検定統計量は同じであっても，先に説明した単位根の検定が応用されるのではないことに注意されたい（残差に基づく共和分の検定についてはPhillips and Ouliaris [35]）を参照されたい．次に，この2段階推定法における第1段階の最小2乗推定量の分布は正規分布ではないので，説明変数の有意性の検定や，回帰係数に関する制約の検定などは通常の方法ではできない．このことより，第1段階での回帰式における説明変数の選び方が先決になってしまい，共和分ベクトルに関する統計的推測が難しくなる事に問題が残る．なお，第1段階の回帰式の推定量は小標本で偏りを持つが，超一致性にもかかわらず通常の標本の大きさではこの偏りは小さくならない事がBanerjee他[3]のモンテカルロ実験によって示された．

ところで，(3.14)，(3.15)には階差変数(Δy，Δk)とレベル変数(y，k)が混在している．もしレベル変数が和分過程でかつ共和分がないと，ECMの左辺は$I(0)$，右辺は$I(0)$と$I(1)$の和になる．$I(0)$と$I(1)$の和は$I(1)$であるから，ECMも左辺と右辺の和分過程の次数がつり合わない（balanceしない）のである．元のADMにもどれば，すべての変数は$I(1)$で次数がつり合っている．ところがこのレベル変数の式には「見せかけ回帰」の問題が含まれており，最小2乗推定量は不一致で，統計量の分布も複雑になるため統計的推論が困難になる（Park and Phillips [33]を参照されたい)．もし共和分がなければ，階差変数間の回帰式は，変数がすべて$I(0)$に変換されていることから，見せかけ回帰を回避できる．しかしながら，階差変数間に回帰式を適用しただけでは，レベル変数に関する情報が何らモデルに含まれないのである．あるいは，経済変数間の均衡からの乖離を妨げる力がモデルに反映されないともいわれる．そこでECMの第3の利点は，その経済学的意味合いはともかく，同一回帰式に階差変数とレベル変数が混在しうることにある．レベル変数は階差変数の和であることを想起すれば，ストックとフローという2種類の異なった情報が同時に用いられているのである．共和分残差は$I(0)$であるため，見せかけ回帰の問題は生じない．

3.3.5 共和分の最尤推定法： この節ではJohansen [26]やJohansen and Juselius [27]に

よって導出された複数の共和分あるいは共和分行列の最尤推定量と，共和分の次数に関する尤度比検定を説明しよう．本節に関しては川崎［28］やDolado他［10］そしてとくに最近の発展をまとめたCampbell and Perron［7］を参照されたい．特に最尤推定量の導出はJohansenの原論文よりもBanerjee and Hendry［4］が理解し易いだろう．

m個の$I(1)$変数yのデータが次のようなVARから発生しているとする．

$$y_t=\mu+\Sigma_{i=1,k}A_iy_{t-i}+\Phi D_t+\varepsilon_t \tag{3.16}$$

ここでμは定数のベクトル，A_iは$m\times m$の母数行列，D_tは平均0に調整した季節ダミー変数行列，ε_tは独立で平均0共分散Λの正規確率変数ベクトルである．このVARモデルは(3.10)の方法で以下のようなECMに書き換えることが可能である．

$$\Delta y_t=\mu+\Sigma_{i=1,k-1}\Gamma_i\Delta y_{t-i}+\Pi y_{t-k}+\Phi D_t+\varepsilon_t \tag{3.17}$$

ただし$\Gamma_j=-(I_m-\Sigma_{i=1,j}A_i)$，$\Pi=-(I_m-\Sigma_{i=1,k}A_i)$である．$\Delta y_t$と$\Delta y_{t-i}$は$I(0)$，$y_{t-k}$が$I(1)$であることより，(3.17)の左辺と右辺で変数の和分の次数が釣り合うためには，$\Pi=0$であるか，Πy_{t-k}が共和分しているかのいずれかでなくてはならない．$\Pi=0$の場合ベクトルyの要素間に共和分は無く，階差変数間の回帰式しか残らない．Πのランクがmより小さいrとすると，$\Pi=\alpha\beta'$のように分解でき，β'は$m\times r$の共和分行列である．

最尤法では正規尤度関数を段階的に集約していって最後に共和分行列の推定量を求める．共和分行列の推定では，まず次のような2本の回帰式を最小2乗推定する．

$$\begin{aligned}\Delta y_t&=c+\Sigma_{i=1,k-1}B_{0i}\Delta y_{t-i}+\Phi D_t+q_{0t}\\ y_{t-k}&=d+\Sigma_{i=1,k-1}B_{ki}\Delta y_{t-i}+\Phi D_t+q_{kt}\end{aligned} \tag{3.18}$$

ここでc，dは定数項のベクトル，B_{ij}は未知母数の行列，q_{0t}，q_{kt}は誤差項のベクトルである．(3.18)の2本の式の最小2乗残差をそれぞれ，$\hat{R}_{0t}$，$\hat{R}_{kt}$とおく．nを観測値数とし，$\hat{R}_{0t}$，$\hat{R}_{kt}$を用いて行列$S_{ij}=(1/n)\Sigma_{t=1,n}\hat{R}_{it}\hat{R}'_{jt}(i,\ j=0,\ k)$，を作り，次に行列式$|\lambda S_{kk}-S_{k0}S_{00}^{-1}S_{0k}|=0$，より固有値$\hat{\lambda}_i(i=1,\cdots,m)$を求める．各固有値に対する固有ベクトル$\hat{v}_i$は，$\hat{V}'S_{kk}\hat{V}=I$，$\hat{V}=(\hat{v}_1,\cdots,\hat{v}_m)$をみたすように標準化する．この$m$個の固有ベクトルのうち，大きなほうから$r$個の固有値に対応する固有ベクトルを取り出し，固有値の大きさ順に並べて行列$\hat{\beta}=(\hat{v}_1,\cdots,\hat{v}_r)$を作る．この行列$\hat{\beta}$が$\beta$の最尤推定量になる．$\hat{\beta}$が求まれば，次に共和分残差$\hat{\beta}'y_{t-k}$を計算し，それを

$$\Delta y_t=\mu+\Sigma_{i=1,k-1}\Gamma_i\Delta y_{t-i}+\alpha\hat{\beta}'y_{t-k}+\Phi D_t+\varepsilon_t \tag{3.19}$$

に代入し最小2乗推定により他の係数を求める．Πのランクがたかだか$r(0\leq r<m)$であるという帰無仮説は，小さい方の固有値を使って，統計量$\Lambda_1=-n\Sigma_{i=r+1,m}\ln(1-\hat{\lambda}_i)$で尤度比検定が行える．トレース検定とよばれる．また帰無仮説$r=q$と対立仮説$r=q+1$に対する検定は統計量$\Lambda_2=-n\ln(1-\hat{\lambda}_{q+1})$，で行う．これは最大固有値検定とよばれる．$r$は，帰無仮説$r=0$から検定を始めて，帰無仮説を棄却するまで次数を順増して決めればよい．これらの検定統計量の分布はJohansen and Juselius［27］に与えられている．

3.3.6 定　数　項：　定数項ベクトルには注意が必要で，共和分関係における定数項と，$I(1)$変数yのトレンドあるいは$I(0)$変数Δy_tのドリフト項からなる定数項の両者が存在しうる．共和分関係の定数項はβ_0を$r+1$ベクトルとすれば$\alpha\beta_0$となり，調整行列αによって張られる空間にある．したがって共和分関係は定数項を考慮して$\alpha(\beta_0+\beta'y_{t-k})$と書ける．他方，$\Delta y_t$がドリフトをもつ場合は，ドリフト項を$\mu_0$とすれば，$-(I-\Sigma\Gamma_i)\mu_0$が定数項を構成する．結局，定

数項は $\mu=\alpha\beta_0-(I-\Sigma\Gamma_i)\mu_0$ と2種類の構成要素に分解できる．続けて定数項の推定を説明しよう．定数項が $\hat{\mu}$ と求まれば，$\hat{\mu}$ を調整行列 α へ射影した $\alpha(\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'\hat{\mu}$ を共和分定数項とし，そして $\hat{\mu}$ を調整行列の補空間へ射影した $\alpha^c(\alpha^{c\prime}\alpha^c)^{-1}\alpha^{c\prime}\hat{\mu}$ をドリフトから生じる定数項と分解すればよい．ここで α^c は α の直交補空間を張る行列で，変換行列の和は恒等行列である．厳密な定数項の表現は Johansen [26] に与えられる．このドリフト項の存在は次節で述べられるように推定及び検定に影響をもつ．

3.3.7　線形制約の尤度比検定：　共和分行列 β や調整行列 α の行に関する制約に関する尤度比検定を以下説明しよう．行に関する線形制約は s を m より小として $s\times m$ の既知行列 K_β' により $K_\beta'\beta_i=0(i=1,\cdots,r)$ と書けよう．K_β' の s 行は m 次元空間内で s 次元部分空間を張るが，線形制約により β_i' はその直交補空間に在る．他方 $K_\beta'H=0$ となる $m\times(m-s)$ 行列 H を求めれば H は K_β' の直交補空間を張るから，$(m-s)\times 1$ の未知母数を含むベクトル ϕ_i により，$\beta_i=H\phi_i$ と線形制約の表現を変えることができる．未知母数は制約により $(m-s)$ 個に減少している．すべての共和分ベクトルについて制約を書き直すと線形制約は H_0:$\beta=H\phi$ となり，推定すべき未知母数は ϕ になる．ここで $\hat{\lambda}_i$ は制約なしの尤度関数を解いて求められた n 個の固有値の大きい方の r 個とし，$\tilde{\lambda}_i$ は固有方程式 $|\lambda H'S_{kk}H-H'S_{k0}S_{00}^{-1}S_{0k}H|=0$ の n 個の解のうち大きい方の r 個とすれば，$\Lambda_3=T\Sigma_{i=1,r}\{(1-\tilde{\lambda}_i)/(1-\hat{\lambda}_i)\}$ が尤度比検定統計量になり，帰無仮説のもとで漸近的に自由度 $r\times s$ のカイ2乗分布にしたがう．2段階法では共和分ベクトルに対する制約の検定はできないのに対し，最尤法ではそれが可能である．ただし制約は β のすべての列について共通である．

共和分行列 β に関する制約と同様に，$s\times m$ の既知の行列 K_α' について調整行列 α の行に関する制約 $K_\alpha'\alpha=0$ も検定できる．制約自体は β の制約のように，$m\times(m-s)$ の既知の行列 A が求まって，H_0:$\alpha=A\Psi$ と変換できる．尤度比検定は可能で，帰無仮説の下で自由度が $r\times s$ のカイ2乗分布に漸近的に従う．さらに $K_\alpha'\alpha=0$ および $K_\beta'\beta=0$ の両方の制約がある場合にも検定を拡張できる．

以上が検定の概略であるが，重要な点は，Π のランクが r で H_0:$\Pi=\alpha\beta'$ と分解できるが定数項に関して制約のないケース a）と，Π のランクが同じく r で H_0:$\Pi=\alpha\beta'$ と分解できるが，定数項にドリフトが含まれず $\mu=\alpha\beta_0'$ となるケース b）とに検定は分けられることである．さらに複雑なことには，ケース a）では定数項の構成が帰無仮説によって定められていないため，真の確率過程（DGP）においてドリフトがある場合とない場合で検定統計量の分布が異なってくるのである．最後に $\Pi=\alpha\beta'$ という前提のもとで，ドリフト項は存在せず「定数項は共和分関係にのみ含まれる」という帰無仮説の検定も用意されている．これはカイ2乗分布を使った検定になる．

現状では最尤推定及び最尤法に基づく検定が実証の世界を風靡しているようだが，2段階法が共和分誤差の系列相関などに対して頑健であることを根拠に2段階推定法を推奨する人々もいる．さらに共和分誤差項の系列相関の処理などのより複雑な状況に対応した分析が行われている．先に引用した最近の展望論文を参照されたい．

謝辞：本稿の作成にあたり大屋幸輔，山本拓，斯波恒正ならびに4名の査読者の方々より数多くの助言をいただき，また誤りを指摘していただいた．さらに畠中道雄先生は未発表論文を参考にする機会を与えられた．記してこれらの方々に感謝したい．

参考文献

[1] Amemiya, T. (1977). A note on a heteroscedastic model, *Journal of Econometrics*, **6**, 365-370.

[2] Anderson, T. W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series*, John Wiley & Sons.

[3] Banerjee, A., Dalado, J. J., Hendry, D. F. and Smith, G. W. (1986). Exploring equilibrium relationships in econometrics through static models: some Monte Carlo evidence, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, **48**, 253-277.

[4] Banerjee, A. and Hendry, D. F. (1992). Testing integration and cointegration: an overview, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, **54**, 225-255.

[5] Beach, C. M. and MacKinnon, J. G. (1978). A maximum likelihood procedure for regression with autocorrelated errors, *Econometrica*, **46**, 51-58.

[6] Breusch, T. S. and Pagan, A. R. (1979). A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation, *Econometrica*, **47**, 1287-1294.

[7] Campbell, Y. and Perron, P. (1992). Pitfalls and opportunities; What macroeconomists should know about unit roots, *NBER Macroeconomic Annual* 1992.

[8] Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1979). Distribution of estimators for autoregressive time series with a unit root, *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 427-431.

[9] Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root, *Econometrica*, **49**, 1057-1072.

[10] Dolado, J. J., Jenkinson, T. and Sosvilla-Rivero, S. (1990). Cointegration and unit roots, *Journal of Economic Surveys*, **4**, 249-273.

[11] Durbin, J. (1970). Testing for serial correlation in least squares regression when some of the regressors are lagged dependent variables, *Econometrica*, **38**, 410-421.

[12] Durbin, J. and Watson, G. S. (1951). Testing for serial correlation in least squares regression, 2′, *Biometrika*, **38**, 159-178.

[13] Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, **50**, 987-1007.

[14] Engle, R. F. and Granger, C. W. J. (1987). Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing, *Econometrica*, **55**, 251-276.

[15] Fuller, W. A. (1976). *Introduction to Statistical Time Series*, John Wiley & Sons.

[16] Godfrey, L. G. (1978a). Testing aganst general autoregressive and moving average error models when the regressors include lagged dependent variables, *Econometrica*, **46**, 1293-1301.

[17] Godfrey, L. G. (1978b). Testing for higher order serial correlation in regression equations when the regressors include lagged dependent variables, *Econometrica*, **46**, 1303-1310.

[18] Godfrey, L. G. (1988). *Misspecification Tests in Econometrics*, Cambridge University Press.

[19] Granger, C. W. J. and Newbold, P. (1974). Spurious regressions in econometrics, *Journal of Econometrics*, **2**, 111-120.

[20] Harvey, A. C. (1990). *The Econometric Analysis of Time Series* (2nd. Ed.), Philip Allan.

[21] Hatanaka, M. (1974). An efficient two-step estimator for the dynamic adjustment model with autoregressive errors, *Journal of Econometrics*, **2**, 199-220.

[22] 畠中道雄 (1991). 計量経済学の方法, 創文社.

[23] Hendry, D. F., Pagan, A. R. and Sargan, J. D. (1984). Dynamic Specification, *Handbook of Econometrics vol.2* (Z. Griliches and M. D. Intriligator ed.), North-Holland, 1023-1100.

[24] Jarque, C. M. and Bera, A. K. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals, *Economics letters*, **6**, 255-259.

[25] Johansen, S. (1988). Statistical analysis of cointegration vectors, *Jornal of Economic Dynamics and Control*, **12**, 231-254.

[26] Johansen, S. (1991). Testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models, *Econometrica*, **59**, 1551-1580.

[27] Johansen, S. and Juselius, K. (1990). Maximum likelihood estimation and inference on cointegration with applications to the demand for money, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, **52**, 169-209.

[28] 川崎能典 (1992). Johansenの共和分検定について, 金融研究, 11, 99-120.

[29] Maddala, G. S. (1992). *Introduction to Econometrics* (2nd. ed.), Macmillan.

[30] Mizon, G. E. and Hendry, D. F. (1980). An empirical and Monte Carlo analysis of tests of dynamic specification, *Review of Economic Studies*, **67**, 21-45.

[31] Nelson, C. R. and Plosser, C. I. (1982). Trends and randam walks in macroeconomic time series:

Some evidence and implications, *Journal of Monetary Economics*, **10**, 139-162.

[32] Newey, W. K. and West, K. D. (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix, *Econometrica*, **55**, 703-708.

[33] Park, J. Y. and Phillips, P. C. B. (1989). Statistical inference in regressions with integrated processes: Part 2, *Econometric Theory*, **5**, 95-131.

[34] Phillips, P. C. B. (1986). Understanding Spurious Regressions in Econometrics, *Journal of Econometrics*, **33**, 311-340.

[35] Phillips, P. C. B. and Ouliaris, S. (1990). Asymptotic properties of residual based tests for cointegration, *Econometrica*, **58**, 165-193.

[36] Phillips, P. C. B. and Perron, P. (1988). Testing for a unit root in time series regression, *Biometrika*, **75**, 335-346.

[37] Ramsey, J. B. (1969). Tests for specification errors in classical linear least squares regression analysis, *Journal of the Royal Statistical Society B*, **31**, 350-371.

[38] Ramsey, J. B. and Schmidt, P. (1976). Some further results on the use of OLS and BLUS residuals in specification error tests, *Journal of the American Statistical Association*, **71**, 389-390.

[39] Savin, N. E. and White, K. J. (1977). The Durbin-Watson test for serial correlation with extreme sample sizes or many regressors, *Econometrica*, **45**, 1989-1996.

[40] Schmidt, P. (1990). Dickey-Fuller tests with drift, *Advances in Econometrics* (T. B. Fomby and G. F. Rhodes, Jr, ed.), 8, JAI Press Inc, 161-200.

[41] Sims, C. A., Stock, J. H. and Watson, M. W. (1990). Inferences in linear time series with some unit roots, *Econometrica*, **58**, 113-144.

[42] Stock, J. H. (1987). Asymptotic properties of least squares estimators of cointegrating vectors, *Econometrica*, **55**, 1035-1056.

[43] Theil, H. (1965). The information approach to demand analysis, *Econometrica*, **33**, 67-87.

[44] White, H. (1980). A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity, *Econometrica*, **48**, 817-838.

[45] 山本拓 (1988). 経済の時系列分析, 創文社.

[46] 吉田知生 (1989). 通貨需要関数の安定生をめぐって一ECM による計測一, 金融研究, 8, 99-147.