日本統計学会誌
第22巻，第3号（増刊号），1993年
357頁～373頁

潜在構造分析論の現状

浅野長一郎*，江島伸興**

Recent Developments of Theory of Latent Structure Analysis

Chooichiro Asano* and Nobuoki Eshima**

近年における潜在構造分析の経緯とその進展方向について概観している．すなわち第1節はいわゆる潜在構造分析と総称される方法論の背景，およびその視点について，第2節では潜在特性モデルについて，また第3節では潜在クラスモデルについて，さらに第4節では潜在連立構造方程式モデルによる因果分析について，各分野の研究論文の現状を概観し，また展開の動向について考察している．

In this survey article, a general view of the methodology of latent structure analysis is presented and some directions of further development are introduced. In the first section, the background of the latent structure analyses is described with the aim of the present article. In the subsequent sections, 2, 3 and 4, latent trait models, latent class models and latent structural equation model are discussed.

1. はじめに

情報化社会と呼ばれる現在，諸種のデータベースの利用・作成が日常的に盛んで，多くの素情報が流通している．しかし，これらの情報の殆どは断面的顕在観測データであり，これらは名義尺度・順序尺度・間隔尺度・比率尺度による多項目観測資料の集合として蓄積される．したがって，現代の人々は，この多面的観測資料を総合的に分析し，概念やプロフィールを構成し，また洞察して，種々の事態や人物・行動・事物を判断していることになる．このような立場は，20世紀の初頭から W. James, J. Dewey 等の社会科学者による，「潜在する概念とそれに基づく顕在行動」という観点で，顕在変量（manifest variable）の観測値から潜在する社会特性の追求を意図する解析的方法論として展開されてきた．これらの過程において，L. J. Cronbach, D. N. Lawley, F. M. Lord, A. Birnbaum, G. Rasch, T. C. Koopmans, P. F. Lazarsfeld, L. Guttman, A. M. Madansky 等の研究は有名である．

人間の行動は内在する幾つかの潜在因子に起因する．これらの本質的な連携や因果を解明するには，多変量顕在変量を通して潜在変量(latent variable)を把握するモデルが不可欠になる．潜在構造モデル（latent structure model）とは，単に顕在変量と潜在変量の関係をモデル化したものから，両者の関係が複雑な入出力システムとして表現されるものまで，潜在特性モデル（latent trait model）・潜在クラスモデル（latent class model）・潜在連立方程式モデル（latent simultaneous equation model)等の種々のモデルを総称している(Lazarsfeld〔81〕, Lazarsfeld & Henry〔83〕)．ここで，$X=(X_1, X_2, \cdots, X_p)$ を顕在変量ベクトル，$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q)$ を潜在

論文受付：1993年2月　改訂受付：1993年3月　受理：1993年4月
* 創価大学　工学部　情報システム科学科，〒192 八王子市丹木町 1-236
** 長崎大学　教養部，〒852 長崎市文教町 1-14

変量ベクトル，また $\boldsymbol{\theta}$ を与えたときのXと X_i の条件付き密度関数または確率関数をそれぞれ $f(x|\boldsymbol{\theta})$ と $f_i(x_i|\boldsymbol{\theta})$, $i=1,2,\cdots,p$, で示すとき，潜在構造モデルでは

$$f(x|\boldsymbol{\theta})=\prod_{i=1}^{p}f_i(x_i|\boldsymbol{\theta})$$

を仮定し，これを局所独立の仮定（assumption of local independence）という．

このような観測変量と潜在変量が連続な場合と質的な場合に種々の分析が考案され，その分類は主として観測変量と潜在変量が連続のとき因子分析および共分散構造分析，観測変量が連続で潜在変量が質的な場合は潜在プロフィール分析，観測変量が質的で潜在変量が連続のとき潜在特性分析およびカテゴリカルデータの因子分析，観測変量と潜在変量が質的なときは潜在クラス分析が提唱されている．ここではカテゴリカルデータの潜在構造分析として潜在特性分析と潜在クラス分析を主にまとめる．

2. 潜在特性分析

2.1 潜在特性分析

潜在特性分析はテスト理論として Lord〔88〕, Cronbach〔31〕, Guilford〔59〕等によって育成され，また Lazarsfeld〔82〕等は社会的態度測定理論としても展開してきた．すなわち，能力や知能の概念を連続尺度で表現し，被験者の潜在連続特性（latent continuous trait）を測定するために潜在特性分析が提唱された．通常，この分析法では対象とする潜在特性に関する2値項目からなるテストを用い，被験者の各項目への正反応確率を潜在特性の関数と見なす．この関数は項目特性関数（item characteristic function）とよばれ，この関数の表す曲線を項目特性曲線（item characteristic curve）という．このように2値または多値の反応で観測された多種の顕在変量による多くの個別データ集合から，その本質を潜在する特性として探索する潜在特性分析は，その潜在する特性を概念または機能として抽出し解釈することを意図する．

この起源的研究から出発し，Gulliksen〔60〕は「学習と知的能力」の調査研究として，テスト理論の展開を含み，1936年から1960年に至る25年間の考察を与えている．また，Lewis〔86〕は，さらにその後の25年間のテスト理論の展開を Gulliksen の展望に若干の変化を加えながら，新しい論文を引用して全容を提示している．両者の意図は，主としてその分野に出現した論文紹介にあるが，個人の能力とテストにおける観測評点間の関係を広範な立場で解釈している．これは今日でもテスト理論の中心課題として研究されている．とくに，Gulliksen が（1）近年の高速計算機の発達の重要性，（2）テスト理論の多くの問題が本質的には数理統計学における多変量解析の問題であると指摘していることは印象深い．また，これらの解法は項目反応理論（item response theory）の課題名で同様に論じられ，項目間の条件付き独立性と反応の単調性が論じられている（Rosenbaum〔113〕）．

このように25年刻みで Gulliksen と Lewis の羅列的な review があるが，本稿は各研究分野を縦覧する立場から，1986年以降の近年の研究に重点をおきつつ，一定の頁数のもとで通論することを意図している．素材としては，主として Psychometrika, British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, Journal of Mathematical Psychology, Journal of Educational Statistics, Educational and Psychological Measurement, Psychological Review 等から得ている．また，本邦の雑誌等にも少数の応用例が散見されるが，ここでは review と理論関係の文献にとどめ，国外の研究展開に主眼をおく．

2.2 潜在特性と分布

潜在変量の分布の推定については，この研究分野の当初から多くの論文があるが，Lord〔89〕

以降の，Andersen & Madsen〔7〕と Sanathanan & Blumenthal〔116〕は1母数ロジスティック（ラッシュ）モデルの推定について周辺最尤推定（marginal maximum likelihood estimation）を論じている．Mislevy〔97〕は完全データ・不完全データの観点から，潜在分布（latent distribution）が指数族の場合を対象とし，最尤推定について Ramsay〔107〕，Dempster et al.〔36〕，Dempster et al.〔37〕の計算アルゴリズムを引用しながら EM 法の適用を提示している．また，細川〔63〕は広範囲の分布型に適用される一般のワイブル分布について Gauss-Hermite の積分公式，Gauss-Laguerre の積分公式等による積分処理や，ニュートン＝ラフソン法等の最適化手法を詳細に調査し，FORTRAN 語によるソフトウエアシステムを与えた．潜在変量 θ の分布については，Andersen〔5〕が2値項目からなるバッテリで観測されたデータによって，m個の潜在母集団における潜在変量の種々の分布の比較を論じている．とくに，正規分布の仮定については等平均や等分散の検定，経時的な母集団の動的変化の検定に2つの型を考察し，同時に相関係数の検定も論じている．

他方，Stout〔122〕は項目反応の理論モデルに関するノンパラメトリックな分布族における潜在特性の探索的方法として，潜在空間の単一次元性の仮説に対する漸近的に妥当な検定手順を提唱している．すなわち，一連のテスト項目の単一次元性に関する Lord〔90〕の提言に対し，Stout〔122〕はなお不充分な現状を詳述の後，次元性に関する新しい考察によって，提言した検定法の漸近効率が1であることを示し，同時に6300回のモンテカルロ実験の結果を示している．

2.3 潜在特性モデル

通常，能力や学力等を潜在変量 θ で示し，それらを測定するテスト2値項目に対し θ を所与としたときの正反応確率は θ の関数 $g(\theta)$ として，$0 \leqq g(\theta) \leqq 1$ を満たす単調（増または減）関数を前提とし，（i）正規累積モデル（normal ogive model, Lawley〔80〕, Tucker〔129〕, Lord〔88〕）と，その累積曲線をおきかえた（ii）ロジスティックモデル（Birnbaum〔19〕）がある．この（ii）のモデルにも母数の異なる数種が提唱され，1母数モデルでの推定では，それまでの EM 法を工夫したアルゴリズム（Bock & Aitkin〔22〕）よりも，条件付き最尤推定や周辺最尤推定を工夫したアルゴリズムが勝ること（Thissen〔126〕），2母数モデル・3母数モデル（Swaminathan & Gifford〔123〕，〔124〕）では母数の最尤推定よりもベイズ推定手順の勝ることが示されている．このロジスティックモデルを少し簡単にしたものに，（iii）ラッシュモデル（Rasch〔109〕）があげられる．このモデルの逆変換は簡素で，計算アルゴリズムが楽なことが魅力で，しかも能力母数の充分統計量が存在する．Andrich〔10〕は，従来の閾値（threshold）の定式化に関連して，順序カテゴリーに関する反応評価の機構を定式化し，さらに母数推定に具体的な解釈を与えてカテゴリー係数と多分類反応に関するラッシュモデルの評価関数を同定している．Muller〔100〕は Andrich〔10〕の連続尺度による一次元潜在特性モデルを拡張し，Klauer〔79〕はこのモデルにおける能力母数の最良信頼区間を与えている．また，線形制約付きの2つのロジスティック潜在特性モデル LLTM（linear logistic test model）と LLRA（linear logistic model with relaxed assumptions）が論じられ，条件付き最尤推定（conditional maximum likelihood estimation）における解の一意性の必要かつ充分条件が示され，さらにこのモデルに関する複合仮説検定も論じられている（Fischer〔50〕）．

これらの潜在特性モデルの一般形についても多くの提示がある．ラッシュモデルに類似した多成分潜在特性モデル（multicomponent latent trait model, Whitely〔132〕）を一般化したモデル（generalized latent trait model, Embretson〔43〕）

$$P(x_{ijT}=1|\theta_j, \eta_m, d)$$
$$=(a-g)\prod_{k=1}^{K}[\exp(\theta_{jk}-\sum_{m=1}^{M}c_{imk}\eta_{mk}-d_k)/\{1+\exp(\theta_{jk}-\sum_{m=1}^{M}c_{imk}\eta_{mk}-d_k)\}]+g,$$

が提唱されている．ここに，項目 $i=1,2,\cdots,I$；因子 $m=1,2,\cdots,M$；個人 $j=1,2,\cdots,J$；g は標準化常数である．

ラッシュモデルが導入されて以来，この変法や拡張が種々に展開されている．各モデルは何れも基本的には指数族として表現され，充分統計量も有する．その典型的モデルに，次のものがある（Masters & Wright〔94〕）．

（i） ポアソン計数モデル（Poisson counts model, Rasch〔111〕）

$$P(a_{vi})=\exp(-\xi_v\varepsilon_i)\xi_v^{a_{vi}}\varepsilon_i^{a_{vi}}/a_{vi}!.$$

（ii） 二項試行モデル（binomial trials model, Andrich〔9〕）

$$P(x_{vi}|\tau_v, \alpha_i, m)={}_mC_{x_{vi}}\exp\{(\tau_v-\alpha_i)x_{vi}\}/\{1+\exp(\tau_v-\alpha_i)\}^m.$$

（iii） 評価尺度モデル（rating scale model, Andrich〔10〕）

$$P(X=x|\beta, \delta, \varkappa)=\exp\{\varkappa_x+x(\beta-\delta)\}/\gamma,$$

$$\text{ここに，}\ \gamma=\gamma(\beta, \delta, \varkappa)=\sum_{k=0}^{m}\exp\{\varkappa_k+k(\beta-\delta)\},$$

$$\varkappa_0=0, \varkappa_x=-\sum_{k=1}^{x}\tau_k, \quad x=0, 1,\dots, m.$$

（iv） 二分類モデル（dichotomous model）

$$\phi_{ni1}=\exp(\beta_n-\delta_{i1})/\{1+\exp(\beta_n-\delta_{i1})\}.$$

（v） 部分クレジットモデル（partial credit model, Masters〔92〕，Masters & Wright〔94〕）

このモデルは計数分析法（Rasch〔109〕），反復試行法（Andrich〔9〕），評価尺度法（Andrich〔10〕）を含み，二分類反応や多分類反応・カテゴリー境界法・反応程度法（Samejima〔117〕）と一貫した考え方をもつ．この部分クレジットモデルは，

$$\pi_{xni}=\exp\{\sum_{j=0}^{x}(\beta_n-\delta_{ij})\}/\sum_{k=0}^{m_i}\exp\{\sum_{j=0}^{k}(\beta_n-\delta_{ij})\}, \quad x=0, 1, 2, \cdots, m_i$$

で示される．ここに，記法の上で $\sum_{j=0}^{0}(\beta_n-\delta_{ij})=0$ とおく．これは被験者 n が項目 i の m_i ステップで評点 x をとる確率で，δ_{ij} は項目 i の j ステップでの難しさ，β_n は被験者 n の潜在変量における位置である．データ行列による尤度は，$\Lambda=\prod_n\prod_i\pi_{xni}$ で示され，各母数の推定は対数尤度関数の最大化によって行われる．

また，一次元多分類ラッシュモデルについては，Jansen & Roskan〔65〕が反応の二分類と多分類について，ξ－不変性の関係が詳細に論じている．またラッシュモデルにおける母数推定は，データ中のノイズの影響が大きいことから，Wainer & Wright〔130〕はロバスト推定としてジャックナイフ変法を提唱している．

ラッシュモデルを多次元化する拡張に関しては，多次元多分類ラッシュモデル(Rasch〔110〕)等があり，Whitely〔132〕はデータについて比較的複雑な多成分の情報を必要とするが，Stegelmann〔121〕はかなり一般的な拡張を一つの加法性の制約の上で示している．この母数の推定は最尤法により，またモデルの検定は尤度比検定による．多次元ラッシュモデル(multidimensional Rasch model) には Andersen〔6〕等があるが，最近 Embretson〔44〕は学習過程における多次元ラッシュモデルを提唱し，異なった時点や場所による繰り返し観測データをとり扱っている．このモデルは

$$P(x_{i(k)j}=1|\theta_j, b_j, a_k)=\exp(\sum_{m=1}^{M} a_{km}\theta_{jm}-b_i)/\{1+\exp(\sum_{m=1}^{M} a_{km}\theta_{jm}-b_i)\}$$

で示される．この母数推定は最尤法により，数値計算としてはニュートン＝ラフソン法による逐次収束計算によらねばならない．

混合ラッシュモデルに関して，van den Wollenberg〔134〕は「2つの均一なラッシュ・テストが同じ母数ベクトルをもち，その特性が同一分布にしたがい，さらにその観測素点に基づいてサンプルを分割したとき，項目母数の推定量が部分サンプルを通して等しいという意味で，2つのテストの連鎖は均質なラッシュ分布する」という定理を提唱した．他方，Forman〔52〕は例証によって上の定理が間違いで，さらに2つの潜在特性の相関が小さいほど不均質性は増大することを明かにした．しかし，これらの結果は，項目母数の推定量の差異が小さければ，サンプル数が大きくても，Andersen〔2〕の尤度比検定統計量は有意性を示すことがないので，Van den Wollenberg〔134〕は理論的に正確でなくても，実用的には妥当と述べている．

Westers & Kelderman〔131〕は，多肢選択項目における DIF (differential item functioning) を試験するためのテスト項目反応の解析法を提唱している．テストを受ける人の間で，同じ可能性で正反応を示す確率が一部の人達には有意に異なった確率になるような DIF を示す項目がある．このような項目をテストから除去し改良するために，DIF 項目の同定が重要になる．このための DIF 探知法は，Rudner et al.〔115〕，Berk〔18〕，Osterlind〔104〕等多くの提唱があり，また最近は項目反応理論に基づいた Lord〔90〕，Muthen & Lehman〔103〕がある．Westers & Kelderman〔131〕は Thissen *et al.*〔128〕よりも簡単で，母数が少ないことと一つの潜在クラスモデルとして定式化される二つの利点を有している．事実，Thissen *et al.*〔128〕はテスト項目に関して「知らない」，「一部の知識がある」，「完全な知識がある」の3つの状態に区別を入れたモデルを提唱しているが，Westers & Kelderman〔131〕はこのモデルの単純化を提唱しているその論文の多肢選択項目に関するモデルは，ある母集団からの被験者が k 個のテスト項目をうけ，項目 j に r_j 種の中の1つの反応 y_s, $s=1,2,\ldots,r_j$, を回答したとする．ここに，その人の潜在反応を x_j とし，知識の有無によって x_j の値を2値（0，1）で，x_j, y_j の確率変数を X_j, Y_j として，潜在反応 x_j を与えたときの観測反応 y_j の条件付き確率を $\Phi_{x_jy_j}{}^{X_jY_j}=P(y_j|x_j)$ とする．さらに，θ を潜在能力，δ_j を項目 j の難易度母数(difficulty parameter)とし，簡単な1母数ロジスティックモデル $P(x_j|\theta)=\exp\{x_j(\theta-\delta_j)\}/1+\exp(\theta-\delta_j)\}$ を仮定して，y_j と x_j がそれぞれ x_j と θ だけに依存するとすると，

$$P(y_j|\theta)=\{\Phi_{0y_j}{}^{X_jY_j}+\Phi_{1y_j}{}^{X_jY_j}\exp(\theta-\delta_j)\}/\{1+\exp(\theta-\delta_j)\}$$

が得られる．もし項目 j が DIF を示せば母数 $\Phi_{x_jy_j}{}^{X_jY_j}$ や難易度母数 δ_j は全ての部分集団(subgroups) に対して同じ値をとらないことになる．提唱している方法は不完全潜在クラスモデル (incomplete latent class model) を使って DIF を検証することで，尤度比検定を漸近的性質によって x^2 検定する．また，異なった潜在クラスモデルの適合度を比較して，ラッシュモデル

の母数における DIF が試験できる等の研究がある (Kelderman〔77〕, Kelderman & Macready〔78〕). このように, 多肢選択項目に関するモデルは潜在クラスの枠の中で展開され, また異なった DIF 探知法は潜在変量を一部の群として定義し定式化される.

3. 潜在クラス分析

3.1 潜在クラス分析の歴史的経緯

潜在クラス分析 (latent class analysis) は多項目観測による社会調査等において対象集団中に潜在する数種のクラスを抽出し, その潜在クラスを解釈する目的の方法論として研究開発されてきた. これらの初期の潜在クラス分析の研究は, 主として説明方程式から代数的とり扱いでモデル中の母数を推定する試みであり (Lazarsfeld〔81〕), この方程式に対する種々の解法が提唱された (Green〔58〕, Anderson〔8〕, Gibson〔53〕,〔55〕, Madansky〔91〕). しかし, これらの解法は取り扱いが複雑で, しかも不適解の発生が多く, 現在あまり適用されていない. 近年はコンピュータの発展とともに, 理論的に優れた最尤法が母数推定に採用されている. ここでも数値解法の上で不適解の発生と一意な収束性が主要課題として問われている. が, Goodman〔56〕や Dempster *et al.*〔36〕の EM 法やその変法の適用による最尤推定アルゴリズムが導入され, 潜在クラス分析の実データ解析への適用が活発になってきている. この方法は収束の速さが遅いものの, 最尤推定において不適解を発生しない効果的な方法である. 他方, Forman〔51〕は潜在クラスモデルの母数を変換して最尤推定を行っている. この方法は不適解を防ぐ方法として注目されている. さらに, 最近の EM 法による母数推定に関する研究として Mooijaart & Heijden〔99〕がある.

潜在クラス分析の適用には, 探索的分析 (exploratory analysis) と検証的分析 (confirmatory analysis) があるが, 近年はより具体的なモデルを導入した検証的分析法の展開が多く見られる. ガットマン尺度 (Guttman〔62〕) を潜在反応に適用した潜在距離モデル (Lazarsfeld〔81〕) は, モデルの改良 (Goodman〔57〕, Dayton & Macready〔33〕) や母数推定に関して研究されている (Proctor〔106〕, Eshima & Asano〔48〕). 潜在反応パターンを分析するための尺度モデル (scaling model) の研究は, Dayton & Macready〔32〕,〔33〕, Price at al.〔105〕, Rindskoph〔112〕, Clogg & Goodman〔28〕, Eshima〔45〕,〔46〕などに含まれ, データの縮約のための有効な分析法を与えている. 潜在クラスモデルの拡張としては, 分布が既知の付随変量 (concomitant variable) をもつ潜在クラスモデルが Dayton & Macready〔34〕により提唱されている. また, 潜在クラスモデルを用いた因果分析 (Goodman〔56〕, Dillon & Goldstein〔38〕) も潜在変量の間の因果関係を説明する上で重要である. その他, 潜在クラスモデルの適応テストにおける応用 (Dayton & Macready〔35〕) も見られ, 潜在クラスモデルの検証的分析法としての研究が急速に展開されている現状にある.

3.2 潜在クラスモデル

いま, 母集団 Θ が A 個の潜在クラス (latent class) と呼ばれる部分母集団 Θ_a, $a=1,2,\cdots,A$, に分割されているとする. ここに, X_i をカテゴリー $\{0,1,2,\cdots,C_i\}$, $i=1,2,\cdots,I$ を持つ観測項目を表し, p_{aik} で潜在クラス a 内の個人が項目 X_i にカテゴリ k の反応を示す確率を示すとき, 潜在クラス分析では潜在クラス a 内の各個人の項目 X_i, $i=1,2,\cdots,I$ に対する反応は互に独立であると仮定する. この局所独立の仮定の意味で各潜在クラスは均質である. v_a で潜在クラス a の構成率を表すとき, 母集団 Θ 内の個人が $X_i=x_i$, $i=1,2,\cdots,I$ の反応を示す確率 $p(x_i, x_2, \cdots, x_I)=p(X=x_i, i=1,2,\cdots,I)$ は

$$p(x_i, x_2, \cdots, x_I)=\sum_{a=1}^{A} v_a \prod_{i=1}^{I} p_{aix_i} \tag{3.1}$$

で示される．この方程式で確率 $p(x_i, x_2, \cdots, x_I)$ を顕在確率(manifest probability)，母数 v_a や p_{aix_i} を潜在確率 (latent probabilility) と呼ぶ．潜在クラスは顕在変量 X_i 間の相互依存関係を説明する潜在概念であり，探索的分析では潜在クラスの個数は未知である．

一般モデル (3.1) では顕在確率は $\prod(C_i+1)-1$ 個の独立な母数を含み，潜在確率は $(A-1)+A(\sum C_i-I)$ 個の独立な母数をもつ．このために顕在母数と潜在母数が識別可能 (identifiable) であるためには

$$\prod_{i=1}^{I}(C_i+1)-1 \geqq (A-1)+A(\sum_{i=1}^{I} C_i-I)$$

の条件が必要となる．一般には，独立な顕在母数の数≧独立な潜在母数の数，の条件がモデルの識別可能の必要条件である．実際のデータ解析は上の条件下で母数推定が行われ，推定された母数に関して局所識別可能 (local identifiable) の条件 (Goodman〔56〕) が調べられる．この条件は潜在母数を ϕ_k とするとき，行列 $(dp(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_1)/d\phi_k)$ のランクが独立な潜在母数の個数に等しくなることである．ここに，この行列は顕在母数について行に，潜在母数について列に並べたものとする．

探索的分析ではモデル (3.1) に基づきデータから母数推定を行い，その結果の解釈を行う．他方，検証的分析では対象とする現象に関する実質科学での知識を積極的にモデルに反映させて分析を行う．そのために，モデル (3.1) は種々の制約を受けることになる．

3.3 潜在距離モデル

いま，I 個の 2 値項目が 1 個の特性に関する難易度順に $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_I$ で示されているとする．ここに 2 値項目のカテゴリーは 0 または 1 とし，$X_i=0$ を負反応，$X_i=1$ を正反応と呼ぶことにする．ガットマンの完全尺度モデル (Guttman's perfect scale model) での反応パターン $(X_1, X_2, \cdots, X_I)=(x_1, x_2, \cdots, x_I)$ は次の $I+1$ 個である．

$$(0,0,\cdots,0),(1,0,\cdots,0),\cdots,(1,1,\cdots,1) \tag{3.2}$$

このモデルでは上の反応パターンにより被験者の特性に対する評価を行うが，この決定論的モデルは現実にはほとんど存在せず，ガットマンの完全尺度モデルの確率モデルとしての改良が潜在距離モデル (latent distance model) である．

潜在距離モデルでは $I+1$ 個の潜在順序クラス (latent ordered class) を仮定し，モデル (3.1) で $p_{ai1}=p_{ai}$ とするとき

$$p_{ai}=\begin{cases} p_i^L, & a=0,1,2,\cdots,i-1 \\ p_i^H, & a=i,i+1,\cdots,I, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$0 \leqq p_i^L \leqq p_i^H \leqq 1 \tag{3.4}$$

の制約をおく．この場合反応パターン(3.2)に相当するものが項目 $(X_1, X_2, \cdots, X_I)$ に対する次の正反応確率のパターンである．

$$(p_1^L, p_2^L, \cdots, p_I^L),(p_1^H, p_2^L, \cdots, p_I^L),\cdots,(p_1^H, p_2^H, \cdots, p_I^H).$$

上のパターンは潜在クラス 0 から I までの正反応確率のパターンである．この意味で潜在クラスはクラス 0 からクラス I まで順序付けされ，潜在ガットマン尺度を構成する．また，潜在順

序クラスが存在する場合は潜在連続特性 θ を仮定することが可能である．いま，θ を与えたときの項目 X_i に関する正反応確率を $f_i(\theta)$ とすれば，$-\infty=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_I<\theta_{I+1}=\infty$ に対して

$$f_i(\theta)=\begin{cases} p_i^L, & \theta<\theta_i \\ p_i^H, & \theta\geqq\theta_i \end{cases}$$

を仮定できる．ここに θ_i は閾値を表す．上の仮定から潜在距離モデルは潜在特性モデルに含めることもできる．式（3.3）と（3.4）で特徴づけられる潜在クラスモデルの母数推定については従来不等式条件（3.4）を無視して行われたが，Eshima & Asano〔48〕は

$$p_i^L=\exp(a_i)/\{1+\exp(a_i)\},\quad p_i^H=\exp(a_i+b_i)/\{1+\exp(a_i+b_i)\},\quad b_i=\exp(\beta_i)$$

とする母数変換を用い，未知母数の最尤推定に関して EM 法を適用している．このモデルでは

$$0<p_i^L<p_i^H<1$$

の条件が自動的に満たされ，構造化モデル（structured model）と呼んでいる．さらに Eshima〔47〕では潜在ガットマン尺度を用いて多次元の潜在連続特性の評価を論じている．

潜在距離モデルは一般に順序クラスの存在を仮定したモデルへの拡張が可能である．順序クラスを特徴づける母数 $\theta_a,\ a=1,2,\cdots,A,$ が $\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_A$ を満たすとき，正反応確率 p_{ai} は適当な関数

$$p_{ai}=g_i(\theta_a) \tag{3.5}$$

で示される．関数 $g_i(\theta)$ の与え方は個々の目的に応じて与えることが可能で，任意の実数 θ に対して $0\leqq g_i(\theta)\leqq 1$ を満たす単調増加関数の採用が適当である．また，関数 $g_i(\theta)$ が幾つかの項目母数（item parameter）を含むことも許容されるが，その母数の数が比較的少数で，かつ母数の解釈が容易である関数の選択が重要である．例えば

$$g_i(\theta)=\exp(\theta-d_i)/\{1+\exp(\theta-d_i)\} \tag{3.6}$$

とすれば，(3.5) に対して $g_i(\theta_1)<g_i(\theta_2)<\cdots<g_i(\theta_A),\quad i=1,2,\cdots,I,$ が成立し，かつ母数 d_i は項目 X_i の難易度を示す．

3.4　尺度モデル

尺度モデル（scaling model）は複雑な 2 値データの縮約のための潜在クラスモデルで，幾つかのモデルが提唱されている．ここでは各項目 X_i は技術 (skill) $S_i,\ i=1,2,\cdots,I$ の獲得状態の指標と見なし，観測は項目 X_i に対して行う．いま，

$$S_i=\begin{cases} 0, & \text{（技術の獲得なし）} \\ 1, & \text{（技術の獲得あり）} \end{cases}$$

と規約すれば S_i は真の技術獲得状態を表す潜在確率変数となる．顕在変量 $(X_1,X_2,\cdots,X_I)$ の標本空間 X は一般に 2^I 個の反応パターン $(x_1,x_2,\cdots,x_I)$ を含むが，潜在変量 $(S_1,S_2,\cdots,S_I)$ の標本空間 S は X の部分集合である．S の要素を潜在反応パターンという．いま，

$$v(s)=P\{(S_1,S_2,\cdots,S_I)=(s_1,s_2,\cdots,s_I)\}$$

と置く．ここに $s=(s_1,s_2,\cdots,s_I)$ であり，説明方程式は (3.1) に基づき次のように与えられる．

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_I)=\sum_s v(s)\prod_{i=1}^{I} P(X_i=1|S_i=s_i)^{x_i}\{1-P(X_i=1|S_i=s_i)\}^{1-x_i}$$

このモデルにおいて $P(X_i=0|S_i=1)=1-P(X_i=1|S_i=1)$ は省略過誤率 (omission error rate) を示し，$P(X_i=1|S_i=0)$ は侵入過誤率（intrusion error rate）を表す．Dayton & Macready〔32〕では

(3.7)
$$P(X_i=1|S_i=s_i)=\begin{cases}\beta, & S_i=0\\ 1-\alpha, & S_i=1\end{cases}$$

を用いている．このモデルでは省略過誤率 β と侵入過誤率 α は全ての項目で一定である．また，Dayton & Macready〔33〕は

(3.8)
$$P(X_i=1|s_i)=\begin{cases}\beta_i, & S_i=0\\ 1-\beta_i, & S_i=1\end{cases}$$

を提唱している．ここでは省略過誤率と侵入過誤率は項目毎に同一の値 β_i をとる．これらのモデル (3.7) と (3.8) は制約的であり，母数推定に関する便宜上の制限と考えられる．しかし，Dayton & Macready〔33〕は母数の最尤推定においては無意味な推定値 $\beta_i>1$ や $\beta_i<0$ などの不適解の発生や分析前に仮定したモデルと推定結果が特定できない場合が起こることを注意している．

Eshima〔45〕はモデル

(3.9)
$$P(X_i=1|S_i=s_i)=\begin{cases}\exp(a_i)/\{1+\exp(a_i)\}, & S_i=0\\ \exp(a_i+b_i)/\{1+\exp(a_i+b_i)\}, & S_i=1\end{cases}$$

を提唱している．ここに，$b_i=\exp(\beta_i)$，ここでは母数 a_i が項目 X_i への侵入過誤の効果を示し，b_i は技術 s_i の獲得による項目 X_i に対する正反応への効果を表す．このモデルでは省略過誤率と侵入過誤率が項目毎に異なり，かつ

(3.10)
$$P(X_i=1|S_i=1)>P(X_i=1|S_i=0)$$

が成立する．条件 (3.10) は母数推定後に仮定したモデルを特定するために重要である．構造化モデル (3.9) の最尤推定法は Eshima〔45〕に与えられ，この推定アルゴリズムで収束すれば，Dayton & Macready〔33〕に述べられている不適解を導出しない．母数推定後の結果解釈も重要であり，その議論は Eshima〔46〕に与えられている．また標本空間 S が (3.2) のパターンから構成されるとき潜在尺度モデルは潜在距離モデルとなる．

その他のモデルとして Goodman〔57〕は母集団を本質的に測定可能（intrincical scalable）な反応者と本質的に測定不可能な反応者の混合とするモデルを提唱し，Dayton & Macready〔33〕はモデル (3.8) を用いて Goodman〔57〕のモデルを改良している．Goodman〔57〕の接近法も有効で，Goodman〔57〕のモデルをモデル (3.9) を用いて改良することも可能である．

3.5 その他の潜在クラスモデル

ここではその他の潜在クラスモデルについて述べる．潜在クラスモデルの拡張として，付随変数をもつ潜在クラスモデル (concomitant variable latent class model) が Dayton & Macready〔34〕によって提唱されている．いま $Y=(Y_1, Y_2, \cdots, Y_K)$ を付随変数とし，回帰モデルのように $Y=y_b=(y_{b1}, y_{b2}, \cdots, y_{bK})$, $b=1, 2, \cdots, B$ が説明変数として各被験者に与えられているとする．このとき，

$$(3.11)\qquad P(X_i=x_i,\ i=1,2,\cdots,I\,|\,Y=y_b)=\sum_{a=1}^{A}v(a|b)\prod_{i=1}^{I}p_{aix_i}$$

を仮定する．ここに，$v(a|b)$ は $Y=y_b$ を与えたときの潜在クラス a の構成率である．Y が名義的変数であれは（3.11）は Clogg & Goodman〔28〕に論じられているような複数の標本群の同時潜在クラス分析を与える．Y が連続変数である場合が重要であり，Y の所与の値の潜在クラス構成率に対する効果の分析が可能である．応用面での発展は今後に期待できると考えられる．

連続データの分析に際しては，Gibson〔54〕によって潜在プロフィール分析（latent profile analysis）が提唱されている．このモデルの持つ基本構造は潜在クラスモデルの影響を強く受けて，潜在クラスモデルに含める立場もある（Bartholomew〔13〕）．いま，顕在変量 $X_i,\ i=1,2,\cdots,I$ は連続変量で，母集団が A 個の潜在クラスに分割されているとする．潜在クラス a を所与とするとき顕在変量は独立であり，顕在変量 X_i の分散共分散は

$$\sigma_{ii}=V(X_i)=\sum_{a=1}^{A}v_a\{E(X_i|a)-E(X_i)\}^2+\sum_{a=1}^{A}v_aV(X_i|a),$$

$$\sigma_{ij}=Cov(X_i,X_j)=\sum_{a=1}^{A}v_a\{E(X_i|a)-E(X_i)\}\{E(X_j|a)-E(X_j)\},\quad i\neq j$$

で与られる．ここに，v_a は潜在クラス a の構成率で，$E(\cdot|a)$ と $V(\cdot|a)$ はそれぞれ潜在クラス a 内での平均と分散を示す．いま，

$$\sigma_{ijB}=\sum_{a=1}^{A}v_a\{E(X_i|a)-E(X_i)\}\{E(X_j|a)-E(X_j)\},$$

とすれば σ_{ijB} はクラス間分散共分散を表し，

$$\sigma_{ijW}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{a=1}^{A}v_aV(X_i|a), & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

と置けば σ_{ijW} はクラス内分散共分散を示す．従って $\Sigma_B=(\sigma_{ijB})$，$\Sigma_W=(\sigma_{ijW})$ と置くとき，$X_i,\ i=1,2,\cdots,I$ の分散共分散行列 Σ は

$$\Sigma=\Sigma_B+\Sigma_W$$

のように分解される．いま，$v_a^{1/2}\{E(X_i|a)-E(X_i)\}$ を (i,a) 成分とする $I\times A$ 行列を Λ とすれば

$$\Sigma=\Lambda\Lambda'+\Sigma_W$$

と表現され，また Σ_W は正値対角行列であるので，上の分解は因子分析における分散共分散行列の分解と類似する．この分析法についての研究はまだ少なく，検証的分析法としての有効なモデルと応用研究は今後の方向性である．

4. 潜在構造方程式分析

潜在構造連立方程式モデル（latent structural simultaneous equation model）は，潜在変

量を含む変量間における因果分析（causal analysis）またはパス分析（pass analysis）と呼ばれ，現実に種々の分野で潜在的なシステムにおける因果関係の解明を目的とする．この分析法は計量経済学における回帰論として内生変数（endogeneous variable）と外生変数（exogeneous variable）を有する連立方程式モデルを，入力系と出力系の双方に因子分析的な観点から潜在変量を導入して現象を解明するもので，Joreskog〔66〕，〔67〕，〔68〕，Sorbon〔120〕，Bentler & Lee〔15〕等によって提唱されてきた．

Aigner *et al.*〔1〕は計量経済学研究者用のハンドブックとして，現象の背景から潜在変量を想定し，これらの変量のもつ種々の方程式モデルの解明に関する数理的全容を体系化し，定式化の上で通論している．そこでは，単純方程式モデル，多重方程式モデル，同時方程式モデル，経済的変動による潜在動的モデルを導入し，次いで構造モデルと関数モデルの関係（Dolby〔39〕），潜在変量に関する諸仮定，各場合の構造母数の最尤推定（Dolby〔40〕），同定問題，推定効率，超構造モデル（Dolby〔41〕）を通して，数値計算法と適用例は含まないが，一般的な潜在連立方程式に関する優れた解説書をなしている．

この解法は観測変量の集合に対し，潜在的因果関係が潜在変量に存在するとして，共分散構造モデル（LISREL model ; Joreskog & Sorbom〔69〕; Bentler & Weeks model ; Bentler & Weeks〔16〕）から解明するもので，代表的な Bentler-Weeks モデルは同時に次の 3 式の存在を前提とする．

（i） 構造方程式モデル　$\eta=\beta_0\eta+\gamma\xi.$

（ii） 選択モデル（selection model）　$Y=\mu_y+G_y\eta,\quad X=\mu_x+G_x\xi.$

（iii） 完全モデル（complete model）　$E(Z)=\mu+G\gamma\Xi U,\ Z'=(Y',X').$

$$\begin{aligned}\Sigma_{yy}&=G_y\beta^{-1}\gamma\Phi\gamma'\beta'^{-1}G_y',\\ \Sigma_{yx}&=G_y\beta^{-1}\gamma\Phi G'_x,\\ \Sigma_{xx}&=G_x\Phi G_x'.\end{aligned}$$

ここで，$\eta(m\times1)$ と $\xi(n+1)$ はそれぞれ従属変量・独立変量，$\beta_0(m\times m)$ と $\gamma(m\times n)$ はm個の潜在連立方程式の全ての線形関係を支配する係数行列，$Y(p\times1)$ と $X(q\times1)$ は観測従属変量，G_x と G_y は各行にただ 1 つの要素が 1 で他は 0 の既知の行列，μ_x と μ_y はそれぞれXとYの平均ベクトル，行列 γ と Ξ は各要素事に固定値・制約付き母数および自由な未知母数を含むもので，（ii）式左辺の観測ベクトルをもとに（iii）式の各母数を推定することになる．この計算アルゴリズムに関しては，Wiley〔133〕，Joreskog〔67〕，〔68〕，Browne〔24〕，Bentler & Weeks〔16〕，〔17〕があり，また市販の LISREL-ver. 7 がある．最近，これに関して Ke & Asano〔72〕，〔73〕は，Gauss-Newton 法，Levenberg-Marquardt 法，Armijo 法，Scaling 法を継続する算法を研究しソフトウエアを公表し，真のパスを想定した例証では上記の LISREL-ver. 7 よりも良い結果が得られたと報じている．柯〔74〕には政府機関による社会調査における本格的応用が数件含まれている．

また，カテゴリカルな多値変量に関する構造方程式モデルの研究も近年盛んで，Christ offerssen〔26〕と Muthen〔101〕は 2 値データの因子分析モデル（Bock & Lieberman〔23〕）を多因子モデルに拡張し，一般化最小自乗法（GLS, generalized least square method）による母数推定法を考察している．また，連続変量を取り扱う共分散構造モデルに対し，Muthen〔102〕は多値変量における構造方程式モデルを提唱し，GLS 法による母数推定を研究している．いま，多値観測変量ベクトルを $Z=(Z_1,Z_2,\cdots,Z_p)$ とし，各観測変量 Z_i を連続変量 X_i の指標，すなわち，$k(i)=1,2,\cdots,K_i$ に対して

$$Z_i = k(i), \qquad a_{i,k(i)} \leqq X_i < a_{i,k(i)+1}$$

を仮定する．ここに $a_{i,k(i)}$ は閾値である．多値変量に対する構造方程式モデルの取り扱いは，多変量正規分布に従う連続な変量ベクトル $X=(X_1, X_2, \cdots, X_p)$ について行われ，上の（i）～(iii) に示す構造が考察されることになる．母数推定に関し，Lee *et al.*〔85〕は新しい試みとして3段階最小自乗推定法を提唱している．

5. むすび

情報化社会の進展・自然環境の保護・福祉生活の改善等が宣伝され，種々の粗情報が収集され，国の内外でデータ・ベースによる顕在情報は日常的に流通している．これらの多面的な顕在資料によって，社会科学や自然科学の研究者が，現象の潜在的本質の解明と顕在的方策の研究のために，潜在構造分析の方法論はますます必要性を増すと思われる．

しかし，このような将来展望に反し，適用の現況は必ずしも期待に即したものでない．比較的小さな心理学データによる実証研究が主で，むしろ有効な適用例は少ないと思われる．現在の計算機の性能も問われるが，観念的な一般形式の適用による現象解明には限界があり，解の一意性や収束性・計算速度も満足できないことにも一因があろう．すなわち，潜在構造分析と総称される探索的方法が，モデルの上でも，数値解法の上でも，また計算速度の上でも，現象に応じた具体的モデルの提唱，それに適合した解法やアルゴリズムの展開が必要となる．実証の観点から，この分野の理論と適用の必要性に応じた急速な研究開発の進展が望まれる．

謝辞：本初稿に有益なコメントを下さった上坂浩之博士および複数の査読者に心から感謝する．

参考文献

[1] Aigner, D. J., Hsiao, C., Kapteyn, A. and Wansbeek, T. (1984). Latent variable models in econometrics, in *Handbook of Econometrics*, Vol. II, ed. by Griliches, Z. and Intriligator, M. D., North-Holland.

[2] Andersen, E. B. (1973). Conditional inference and multiple choice questionnaires, *British Journal Psychology*, **26**, 31-44.

[3] Andersen, E. B. (1973). A goodness of fit test for the Rasch model, *Psychometrika*, **38**, 123-140.

[4] Andersen, E. B. (1977). Sufficient statistics and latent trait models, *Psychometrika*, **42**, 69-81.

[5] Andersen, E. B. (1980). Comparing latent distributions, *Psychometrika*, **45**, 121-134.

[6] Andersen, E. B. (1985). Estimating latent correlations between repeated testings, *Psychometrika*, **50**, 3-16.

[7] Andersen, E. and Madsen, M. (1977). Estimating the parameters of the latent population distribution, *Psychometrika*, **42**, 357-374.

[8] Anderson, T. W. (1954). On estimation of parameters in latent structure analysis, *Psychometrika*, **19**, 1-10.

[9] Andrich, D. (1978a). A binomial latent trait model for the study of Likert style attitude questionaire, *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **31**, 84-98.

[10] Andrich, D. (1978b). A rating formulation for ordered response categories, *Psychometricka*, **43**, 561-573.

[11] Andrich, D. (1982). An extension of the Rasch model for ratings providing both location and dispersion parameters, *Psychometrika*, **47**, 105-113.

[12] Armijo, L. (1966). Minimization of functions having Lipschitz-Continuous first partial derivatives, *Pacific J. Math.*, **16**, 1-3.

[13] Bartholomew, D. J. (1987). *Latent Variable Models and Factor Analysis*, Charles Griffin &

Compant LTD, London.

[14] Bentler, P. M. (1976). Multistructure statistical model applied to factor analysis, *Multivariate Behav. Res.*, **11**, 3-25.

[15] Bentler, P. M. and Lee, S. Y. (1979). A statistical development of three-mode factor analysis, *British Journal of Mathematical Statistical Psychology,* **32**, 87-104.

[16] Bentler, P. M. and Weeks, D. G. (1980). Linear structural equations with latent variables, *Psychometrika*, **45**, 289-308.

[17] Bentler, P. M. and Weeks, D. G. (1982). Multivariate analysis with latent variables, *Handbook of Statistics*, **2**, 747-771.

[18] Berk, A. (1982). *Handbook of Methods for Detecting Test Bias.* The Johns Hopkins University Press.

[19] Birnbaum, A. (1968). Some latent trait models and their use in inferring an examinee's ability, *Statistical Theories of Mental Test Scores*, ed. Lord & Novick, Chap. 17-20, Addison-Wesley.

[20] Bock, R. D. (1972). Estimating item parameters and latent ability when responses are scored in two or more nominal categories, *Psychometrika*, **37**, 29-51.

[21] Bock, R. D. (1981). Marginal maximum likelihood estimation of item parameters : Application of an EM algorithm, *Psychometrika*, **46**, 443-459.

[22] Bock, R. D. and Aitkin, M. (1981). Marginal maximum likelihood estimation of item parameters : an application of an EM algorithm, *Psychometrika*, **46**, 443-459.

[23] Bock, R. D. and Lieberman, M. (1970). Fitting a response model for n dichotomous scored items, *Psychometrika*, **35**, 179-197.

[24] Browne, M. W. (1974). Generalized least square estimators in the analysis of covariance structures, *South African Statist. J.*, **8**, 1-24.

[25] Brown, M. W. (1984). Asymptotically distribution-free method for the analysis of covariance structures, *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology,* **37**, 1-21.

[26] Christofferson, A. (1975). Factor analysis of dichotomized variables, *Psychometrika*, **40**, 5-32.

[27] Cliff, N. (1979). Test theory without true scores ?, *Psychometrika*, **44**, 373-393.

[28] Clogg, C. C. and Goodman, L. A. (1986). On scaling models applied to data from several groups, *Psychometrika*, **51**, 123-135.

[29] Colonius, H. (1977). On Keats' generalization of the Rasch model, *Psychometrika*, **42**, 443-445.

[30] Cressie, N. and Holland, P. W. (1983). Characterizing the manifest probabilities of latent trait models, *Psychometrika,* **48**, 129-141.

[31] Cronbach, L. J. (1943). Test "reliability" : its meaning and determination, *Psychometrika*, **12**, 1-16.

[32] Dayton, C. M. and Macready, G. B. (1976). A probabilistic model for validation of behavioral hierarchies, *Psychometrika*, **43**, 189-204.

[33] Dayton, C. M. and Macready, G. B. (1980). A scaling model with response errors and intrinsically unscalable respondents, *Psychometrika*, **45**, 343-356.

[34] Dayton, C. M. and Macready, G. B. (1988). Connomitant-variable latent class model, *Jounal of the American Statistical Association*, **83**, 173-178.

[35] Dayton, C. M. and Macready, G. B. (1992). The application of latent class models in adaptive testing, *Psychometrika*, **57**, 71-88.

[36] Dempster, A. P., Laird, N. M. and Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society,* **39**, 1-38.

[37] Dempster, A. P., Rubin, D. M. and Tsutakawa, R. K. (1981). Estimation in covariance components models, *Journal of the American Statistical Society*, **76**, 341-353.

[38] Dillon, W. R. and Goldstein, M. (1984). *Multivariate Analysis : Methods and Applications*, John Wiley and Sons.

[39] Dolby, G. R. (1972). Generalized least squares and maximum likelihood estimation of nonlinear functional relationships, *Journal of the Royal Statistical Society, B*, **34**, 393-400.

[40] Dolby, G. R. (1976a). A note on the linear structural relation when both residual variances are known, *Journal of the American Statistical Asociation,* **71**, 352-353.

[41] Dolby, G. R. (1976b). The ultrastructural relation : A synthesis of the functional and structural relations, *Biometrika*, **63**, 39-50.

[42] de Gruijter, D. N. M. (1985). A note on the asymptotic variance-covariance matrix of item parameter estimates in the Rasch model, *Psychometrika*, **50**, 247-249.

[43] Embretson, S. E. (1984). A general latent trait model for response processes, *Psychometrika*, **49**, 175-186.

[44] Embretson, S. E. (1991). A multidimensional latent trait model for measuring learning and change, *Psychometrika*, **56**, 495-515.

[45] Eshima, N. (1990). Latent class analysis for explaining a hierarchical learning structure, *Journal of the Japan Statistical Society*, **20**, 1-12.

[46] Eshima, N. (1991). Latent scalogram analysis, *Behaviormetrika*, **30**, 1-22.

[47] Eshima, N. (1992). A hierarchical assessment of latent traits by using latent Guttman scaling, *Behaviormetrika*, **19**, 97-116.

[48] Eshima, N. and Asano, Ch. (1988). On latent distance analysis and the MLE algorithm, *Behaviormetrika*, **24**, 25-32.

[49] Fischer, G. H. (1981). On the existence and uniqueness of maximum likelihood estimates in the Rasch model, *Psychometrika*, **46**, 59-77.

[50] Fischer, G. H. (1983). Logistic latent trait models with linear constraints, *Psychometrika*, **48**, 3-26.

[51] Forman, A. K. (1978). A note on parameter estimation for Lazarsfeld's latent class analysis, *Psychometrika*, **43**, 123-126.

[52] Formann, A. K. (1987). On the inhomogeneity of a test compounded of two Rasch homogeneous subscales, *Psychometrika*, **52**, 263-267.

[53] Gibson, W. A. (1955). An extension of Anderson's solution for the latent structure equations, *Psychometrika*, **20**, 69-73.

[54] Gibson, W. A. (1959). Three multivariate models: factor analysis, latent structure analysis and latent profile analysis, *Psychometrika*, **24**, 229-252.

[55] Gibson, W. A. (1962). Extending latent class solutions to other variables, *Psychometrika*, **27**, 73-81.

[56] Goodman, L. A. (1974). Exploratory latent structure analysis using both identifiable and unidentifiable models, *Biometrika*, **61**, 215-231.

[57] Goodman, L. A. (1975). A New model for scaling response patterns: an application of the quisi-independence concept, *Journal of the American Statistical Association*, **70**, 755-768.

[58] Green, B. F. (1951). A general solution for the latent class model of latent structure analysis, *Psychometrika*, **16**, 71-76.

[59] Guilford, J. P. (1961). Psychological measurement a hundred and twenty-five years later, *Psychometrika*, **26**, 109-127.

[60] Gulliksen, H. (1961). Measurement of learning and mental abilities, *Psychometrika*, **26**, 93-107.

[61] Guttman, L. (1950a). The relation of scalogram analysis to other techniques, In S. A. Stouffer, L. Guutman and others, *Measurement and Predicion : Studies in Social Psychology in World War II*, Vol. 4, Princeton University Press.

[62] Guttman, L. (1950b). The basis for scalogram analysis, In S. A. Stouffer, L. Guutman and others, *Measurement and Predicion : Studies in Social Psychology in World War II*, Vol. 4, Princeton University Press.

[63] 細川耕治(1982). Rasch モデルによる潜在特性分析，九州大学大学院総合理工学研究科情報システム学専攻修士論文集．

[64] Jannarone, R. J. (1986). Conjunctive item response theory kernels, *Psychometrika*, **51**, 357-373.

[65] Jansen, P. G. W. and Roskam, E. E. (1987). Latent trait models and dichotomization of graded responses, *Psychometrika*, **51**, 69-91.

[66] Joreskog, K. G. (1969). A general approach to cofirmatory maximum likelihood factor analysis, *Psychometrika*, **34**, 183-202.

[67] Joreskog, K. G. (1970). A general method for analysis of covariance structures, *Biometrika*, **51**, 239-251.

[68] Joreskog, K. G. (1977). Structural equation models in the social sciences: Specification, estimation and testing. *Applications of statistics*, 265-287, North-Holland.

[69] Joreskog, K. G. and Sorbom, D. (1977). Statistical models and methods for analysis of longitudinal data, *Latent Variables in Socieconomic Models*, North-Holland.

[70] Joreskog, K. G. and Sorbom, D. (1979). *Advances in Factor Analysis and Structural Equation Models*, Cambridge, MA : ABT.

[71] Joreskog, K. G. and Sorbom, D. (1989). *LISREL 7 : User's Reference Guide*, Mooresville, IN : Scientific Software, Inc.

[72] Ke, H. and Asano, Ch. (1988). Software system for the analysis of linear equation model, Res. Rep. 113, *Res. Inst. Fund. Inform. Sc.*, Kyushu University.

[73] Ke, H. and Asano, Ch. (1991). An algorithm for linear structural equation model, *Theory and Applications in Computational Statistics*, Scientist, INC.

[74] 柯恵新，黄京華，沈浩 (1992). 調査研究中的統計分析法，北京広播学院出版社.

[75] Keats, J. A. (197). Applications of projective transformations to test theory, *Psychometrika*, **39**, 359-360.

[76] Kelderman, H. (1984). Loglinear Rasch model tests, *Psychometrika*, **49**, 223-245.

[77] Kelderman, H. (1989). Item bias detection using loglinear IRT, *Psychometrika*, **54**, 681-697.

[78] Kelderman, H. and Macready, G. B. (1990). The use of loglinear models for assessing differential item functioning across manifest and latent examinee groups, *Journal of Educational Measurement*, **27**, 307-327.

[79] Klauer, K. C. (1991). Exact and best confidene intervals for the ability parameter of the Rasch model, *Psychometrika*, **56**, 535-547.

[80] Lawley, D. N. (1943). The application of the maximum likelihood method for factor analysis, *British Journal of Psychology*, **33**, 172-175.

[81] Lazarsfeld, P. F. (1950). The logical and mathematical foundation of latent structure analysis, in S. A. Stouffer, L. Guttman and others, *Measurement and Pridiction : Studies in Social Psychology in World War II*, Vol. 4, Princeton University Press.

[82] Lazarsfeld, P. F. (1959). *Latent Structure Analysis, Psychology : A Study of a Science*, S. Koch, ed., New York : McGrowiHill Book Company, Vol. 3, 476-535.

[83] Lazarsfeld, P. F. and Henry, N. W. (1968). *Latent Structure Analysis*, Houghton Mifflin, Boston.

[84] Lee, S. Y. and Poon, W. Y. (1985). Further developments on constrained estimation in analysis of covariance structure. *The Statistician*, **34**, 305-316.

[85] Lee, S. Y., Poon, W. Y. and Bentler, P. M. (1990). A three-stage estimation procedure for structual equation models with polytomous variables, *Psychometrika*, **55**, 45-51.

[86] Lewis, C. (1986). Test theory and psychometrika : the past twenty-five years, *Psychometrika*, **51**, 11-22.

[87] Liou, M. and Chang, C. (1992). Construcing the exact significance level for a person fit statistic, *Psychometrika*, **57**, 169-181.

[88] Lord, F. M. (1952). A theory of test scores, *Psychometrika Monograph*, No. 7, 17.

[89] Lord, F. M. (1969). Estimating true-score distributions in psychological testing, *Psychometrika*, **34**, 259-299.

[90] Lord, F. M. (1980). Applications of item response theory to practical testing problems, *Lawrence Erlbaum Associates*, Hillsdale, N. J..

[91] Madansky, A. (1960). Determinantal methods in latent class analysis, *Psychometrika*, **25**, 183-198.

[92] Masters, G. N. (1982). A Rasch model for partial credit scoring, *Psychometrika*, **47**, 149-174.

[93] Masters, G. N. and Wright, B. D. (1982). Constructing a fear-of-crime variable : a comparison of two Rasch models, *Educational Research and Perspectives*, **1**, 18-31.

[94] Masters, G. N. and Wright, B. D. (1984). The essential process in a family of measurement models, *Psychometrika*, **49**, 529-544.

[95] McHugh, R. B. (1956). Efficient estimation and local identification in latent class analysis, *Psychometrika*, **21**, 331-347.

[96] Meredith, W. (1987). A note on latent trait theory and Bowker's test, *Psychometrika*, **52**, 269-271.

[97] Mislevy, R. J. (1984). Estimating latent distributions, *Psychometrika*, **49**, 359-381, 1984.

[98] Mislevy, R. J. (1986). Bayes model estimation in item response models, *Psychometrika*, **51**, 177-195.

[99] Mooijaart, A. and Heijden P. G. M. (1992). The EM algorithm for latent class analysis with equality constraints, *Psychometrika*, **57**, 261-269.

[100] Muller, H. (1987). A Rasch model for continuous ratings, *Psychometrika*, **52**, 165-181.

[101] Muthen, B. (1978). Contributions to factor analysis of dichotomous variables, *Psychometrika*, **43**, 551-560.

[102] Muthen, B. (1984). A general structural equation model with dichotomous ordered categorical, and continuous latent variable indicators, *Psychometrika*, **49**, 115-132.

[103] Muthen, B. and Lehman, J. (1985). Multiple group IRT modeling: Applications to item bias analysis, *Journal of Educational Statistics*, **10**, 133-142.

[104] Osterlind, S. J. (1983). *Test item bias*, Beverly Hills: Sage.

[105] Price, L. A., Dayton, C. M. and Macready, G. B. (1980). Discovery algorithm for hierarchical relations, *Psychometrika*, **45**, 449-465.

[106] Proctor, C. H. (1970). A probabilistic formultion and statistical analysis for Guttman scaling, *Psychometrika*, **35**, 73-78.

[107] Ramsay, J. O. (1975). Solving implicit equations in psychometric data analysis, *Psychometrika*, **40**, 337-360.

[108] Ramsay, J. O. and Winsberg, S. (1991). Maximum marginal likelihood estimation for semiparacetric item analysis, *Psychometrika*, **56**, 365-379.

[109] Rasch, G. (1960). Probabilistic models for some inteligence and attainment tests, *Danmarks Paedagogisko Institute*, Copenhagen, Demmark.

[110] Rasch, G. (1961). On the meaning of measurement in psychology, *Proc. 4-th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab.,* Univ. Calf. Press. **5**, 119-147.

[111] Rasch, G. (1977). On specific objectivity: An attempt at formalizing the request for generality and validity of scientific statement, *Danish Yearbook of Philosophy*, **14**, 58-94.

[112] Rindskoph, D. (1983). A general framework for using latent class analysis to test hierarchical and nonhierarchical learning models, *Psychometrika*, **48**, 85-97.

[113] Rosenbaum, P. R. (1984). Testing the conditional independence and monotonicity assumptions of item response theory, *Psychometrika*, **49**, 425-435.

[114] Rosenbaum, P. R. (1987). Comparing item characteristic curves, *Psychometrika*, **52**, 217-233.

[115] Rudner, L. M. and Getson, P. R. and Knight, D. L. (1980). Biased item detection techniques, *Journal of Educational Statistics*, **5**, 213-233.

[116] Sanathanan, L. and Blumenthal, S. (1978). The logistic model and estimation of latent structure, *Journal of the American Statistical Association*, **73**, 794-799.

[117] Samejima, F. (1973). A comment on Birnbaum's three-parameter logistic model in the latent trait theory, *Psychometrika*, **38**, 221-233.

[118] 繁桝算男 (1990). カテゴリカルデータの因子分析，行動計量学，18, 41-51.

[119] Sijtsma, K. and Molenaar, I. W. (1987). Reliability of test scores in nonparametric item response theory, *Psychometrika*, **52**, 79-97.

[120] Sorbom, D. (1974). A general method for studying differences in factor means and factor structure between groups, *British. Journal of Mathematical and Statistical Psychology,* **27**, 229-239.

[121] Stegelmann, W. (1983). Expanding the Rasch model to a general model having more than one dimension, *Psychometrika*, **48**, 259-267.

[122] Stout, W. (1987). A nonparametric approach for assessing latent trait unidimensionality, *Psychometrika*, **52**, **4**, 589-617.

[123] Swaminathan, H. and Gifford, J. W. (1985). Bayesian estimation in the two-parameter logistic model, *Psychometrika*, **50**,349-364.

[124] Swaminathan, H. and Gifford, J. A. (1986). Bayesian estimation in the three-parameter logistic model, *Psychometrika*, **51**, 589-601.

[125] Tatsuoka, K. K. (1984). Caution indices based on item response theory, *Psychometrika*, **49**, 95-110.

[126] Thissen, D. (1982). Marginal maximum likelihood estimation for the one-parameter logistic model, *Psychometrika*, **47**, 175-186.

[127] Thissen, D., Steinberg, L. and Fitzpatrick, A. R. (1989). Multiple choice models: The distractors are also part of the item, *Journal of Educational Measurement*, **26**, 161-176.

[128] Thissen, D., Steinberg, L. and Fitzpatrick, A. R. (1989). Multiple choice models: the distractors are also part of the item, *Journal of Educlational. Measurement*, **26**, 161-176.

[129] Tucker, L. R. (1951). Academic ability test. *Research Memorandom* 51-17, Princeton, N. J.:

Educational Testing Service.

[130] Wainer, H. and Wright, B. D. (1980). Robust estimation of ability in the Rasch model, *Psychometrika*, **45**, 373-391.

[131] Westers, P. and Kelderman, H. (1991). Examining differential item functioning due to item difficulty and alternative attractiveness, *Psychometrika*, **57**, 107-118.

[132] Whitely, S. E. (1980). Multicomponent latent trait models for ability tests, *Psychometrika*, **45**, 479-494.

[133] Wiley, D. E. (1973). The identification problem for structural equation models with unmeasured variables, *Structural Equation Models in the Social Science*. **69-83**, Academic Press.

[134] van den Wollenberg, A. L. (1982). Two new test statistics for the Rasch model, *Psychometrika*, **47**, 123-140.

[135] Yen, W. N. (1985). Increasing item complexity : a possible cause of scale shrinkage for unidimensional item response theory, *Psychometrika*, **50**, 399-410.